

Programme de colle - semaine 32 - 16 juin

Le cours doit être parfaitement su.

1 Déterminant

tout exercice sur le chapitre

2 Intégration sur un segment

Uniforme continuité

Définition, les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues, théorème de Heine.

Intégrale d'une fonction réelle en escalier

1. Définition
2. Propriétés des intégrales des fonctions en escaliers : relation de Chasles, linéarité, croissance

Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

1. Théorème : pour f à valeurs réelles et continue par morceaux, les quantités $I_-(f) = \sup \left\{ \int_{[a,b]} g / g \text{ en escalier et } g \leq f \right\}$ et $I_+(f) = \inf \left\{ \int_{[a,b]} h / h \text{ en escalier et } f \leq h \right\}$ existent et sont égales.
Définition : leur valeur commune est l'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_{[a,b]} f$. Extension au cas où les bornes sont dans un ordre quelconque et notation : $\int_a^b f(t)dt$
2. Propriétés : Relation de Chasles, linéarité, positivité et croissance, majoration (inégalité triangulaire pour les intégrales).
3. Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski.
4. si f est positive ou nulle et si $f(x_0) > 0$ et f continue en x_0 , l'intégrale est strictement positive. Corollaire : une fonction continue sur $[a, b]$ de signe constant et d'intégrale nulle est nulle sur $[a, b]$. Lorsque f et g sont continues cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et dans l'inégalité de Minkowski.
5. Sommes de Riemann. Théorème : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$. Démo : 1er cas : si f est lipschitzienne convergence en $O\left(\frac{1}{n}\right)$, 2ème cas : si f est continue sur $[a, b]$.
En pratique, on se ramène au segment $[0, 1]$.
6. **La suite (ci-dessous) sera vu lundi, au programme de colle à partir de mercredi**

(a) Propriétés d'une fonction définie par une intégrale qui dépend de la borne supérieure, à savoir $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ où f est continue par morceaux sur l'intervalle I et $a \in I$.

— F est continue sur I .

— F est dérivable en tout point $x_0 \in I$ où f est continue et alors $F'(x_0) = f(x_0)$.

(b) Avec les notations précédentes, si f est continue sur l'intervalle I , f possède des primitives, et F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Théorème fondamental : si f continue sur l'intervalle I et $a, b \in I$, alors $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ où G est n'importe quelle primitive de f sur I .

(c) Formule de Taylor avec reste intégral et démonstration de son corollaire : l'inégalité de Taylor-Lagrange.

(d) Extension : intégrale des fonctions cpm sur un segment de \mathbb{R} à **valeurs complexes**. Définition, propriétés.

QUESTIONS DE COURS :

- Déterminant de VanderMonde. Énoncé et démonstration (on l'a démontré par récurrence avec le polynôme $P_n = V(x_0, \dots, x_n, X)$).
- Si $A \in M_n(K)$, l'application $\chi_A : t \in K \mapsto \det(tI_n - A)$ est un polynôme unitaire de degré n avec :
 $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$
- Exo (Pour apprendre à utiliser l'uniforme continuité). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On note pour $n \geq 1$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$.
 - Si f est de classe \mathcal{C}^1 , montrer que $(S_n)_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$
 - f continue sur $[0, 1]$, montrer que $(S_n)_n$ tend vers 0.
- Si f continue et positive sur $[a, b]$ avec $f(x_0) > 0$ et f continue en x_0 alors $\int_{[a,b]} f > 0$.
 Conséquence : Si f est continue sur $[a, b]$ de signe constant et d'intégrale nulle alors f est nulle sur $[a, b]$.
- Théorème sur les sommes de Riemann (méthode des rectangles). Démo à demander soit dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ (ou lipschitzienne), avec la vitesse de convergence en $O\left(\frac{1}{n}\right)$, soit dans le cas continue sur $[a, b]$.
- Cet exercice sera corrigé lundi. Exigible à partir de mardi. Exo : Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a; b]$. On note pour $n \in \mathbb{N}$: $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$
 - Si f est de classe \mathcal{C}^1 , montrer que $I_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (grâce à une IPP).
 - Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, montrer qu'on a encore $\lim I_n = 0$.
 On a vérifié que le résultat est vrai pour f constante, puis en escalier, puis utilisé l'approximation uniforme de f par les fonctions en escaliers.
- À partir de mercredi Si on note $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ où f est continue par morceaux sur I et $a \in I$, alors :
 - F est continue sur I (lipschitzienne sur tout segment inclus dans I).
 - Si f est continue en $x_0 \in I$, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$
- À partir de mercredi Dérivabilité et dérivée d'une fonction du type $\varphi : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} u(t) dt$ si a et b sont dérivables sur l'intervalle I et à valeurs dans l'intervalle J et si u est continue sur J .
- À partir de mercredi Exo (fait en cours) : $H(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$, $G(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
 - Domaine de définition de H . Montrer que H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner l'expression de $H'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Domaine de définition de G . Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ (et sur $] - \infty, 0[$). Expression de $G'(x)$ pour $x > 0$ (et $x < 0$).
 - Justifier que G se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- À partir de mercredi
 - Écrire la formule de Taylor avec reste intégral (Théorème du cours à énoncer).
 - établir :

$$\forall x \geq 0, \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
 - Écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x pour $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre n et \sin à l'ordre $2n+2$.

Ce sera la dernière semaine de colle. **Merci à tous les élèves et à tous les colleurs pour votre travail!**

Message aux élèves - Programme à venir : Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Fonctions de 2 variables puis Familles sommables.