

Programme de colle - semaine 1 - 22 septembre

N.B. aux colleurs : organisation d'une colle et notation

Organisation : La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle.

Le cours doit être parfaitement su. Puis exercice(s) au choix du colleur.

Notation : Une question de cours non travaillée donnera une note de colle < 10 .

Une question de cours peut être travaillée très sérieusement et mal comprise. N'hésitez pas alors à passer du temps pour réexpliquer. La note pourra alors être autour de 10-12, à votre appréciation. La colle n'est pas, à ce stade de l'année, un oral blanc et les élèves ne doivent pas apprendre par coeur sans comprendre par peur de la mauvaise note.

Plus généralement, la colle doit être un temps utile aux élèves pour faire des maths, comprendre le cours et apprendre quelque chose.

Lors des exercices, demandez systématiquement si l'élève a déjà fait l'exercice proposé, puis libre à vous d'en changer ou non si c'est le cas.

Lors de la colle on encouragera les prises d'initiative, les références précises au cours, la rigueur dans les calculs et les raisonnements et la clarté de l'exposition (dernier point difficile en début d'année). On encourage aussi l'élève à proposer un procédé de contrôle sur ses réponses numériques.

La colle étant un oral, l'élève peut ne pas tout écrire au tableau ; par exemple il peut justifier à l'oral qu'une fonction est dérivable, mais il doit mettre un signe au tableau pour que l'interrogateur ne pense pas qu'il a oublié ce point.

Programme semaine 1

Calcul algébrique

notation \sum et changement d'indices, télescopage, sommes géométriques, factorisation $a^n - b^n$, coefficient du binôme, formule du binôme de Newton, sommes doubles y compris triangulaires.

Trigonométrie

Formulaire de trigonométrie, avec linéarisation et formule de transformation $\cos p + \cos q$, $\sin p + \sin q$ (ces dernières sont à savoir retrouver rapidement à l'aide des formules d'addition)

Résolution d'équations $\cos(x) = \cos \theta$ ou avec sinus.

Réduction de $a \cos \theta + b \sin \theta$, et interprétation géométrique. Application à la résolution d'équation $a \cos x + b \sin x = c$ d'inconnue x réel.

Fonction tangente, propriétés, dérivée. Formule d'addition $\tan(a + b)$, $\tan(2a)$. Expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$ (à connaître, et à savoir démontrer)

Nombres complexes

Construction des nombres complexes (non exigible). Conjugaison, module, arguments ;

Inégalité triangulaire ;

Applications à la trigo : technique de l'angle moitié, calcul de $\sum_{0 \leq k \leq n} \cos(kx)$. Linéarisation. Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynômes en $\cos \theta$ et/ou $\sin \theta$

Équations polynomiales de degré 2 Racine carrée d'un nombre complexe, résolution d'un trinôme à coefficients complexes.

N.B. Le chapitre Nombres Complexes n'est pas encore fini. Reporté à la semaine prochaine : relation coefficients racines, racines n ième, exponentielle complexe et géométrie : expression complexe des similitudes directes.

Éléments de logique

Proposition Logique. Négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence. Quantificateurs \forall et \exists . Méthodes de démonstration : récurrence, contraposée, raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse-synthèse.

N.B. on n'a pas eu le temps cette semaine de travailler sur les ensembles. Les notions de produit cartésien, réunion, intersection, complémentaire etc... sont plus ou moins connues des élèves mais j'y reviendrai plus précisément cette semaine.

QUESTIONS DE COURS :

1. Trigo (Questions indépendantes)
 - (1) Résoudre l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$ d'inconnue x dans \mathbb{R}
 - (2) retrouver les expressions de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$ lorsque $\theta \in]-\pi, \pi[$
2. Calcul (au choix du colleur un ou plusieurs des calculs suivants). Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (1) Calcul de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$,
 - (2) Exprimer le produit $1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)$ à l'aide de factorielle et/ou de puissance de 2
 - (3) Calcul de $\sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \frac{(-1)^k}{2^{k+p}}$
 - (4) Expression pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ de $(\sum_{i=1}^n x_i)^2$
3. Inégalité triangulaire (pour 2 complexes) avec cas d'égalité (*énoncé et démo*).
4. Démonstration du corollaire : pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\left| |z| - |z'| \right| \leq |z - z'|$.
5. Calcul pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$
6. Linéarisation : linéarisation de $\cos^{2p}(\theta)$ ou de $\cos^{2p+1}(\theta)$ ou de $\sin^{2p}(\theta)$ ou de $\sin^{2p+1}(\theta)$ (avec $p \in \mathbb{N}$) au choix du colleur et/ou le faire sur un exemple tel que $\cos^3(\theta)$ ou $\sin^3(\theta)\cos^2(\theta)$
7. Expliciter $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$ (on part de la formule de De Moivre) ou $\sin(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos \theta$ et $\sin \theta$
8. a) Déterminer les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$, puis les racines carrées de $3 + 4i$.
b) Vérifier que l'étudiant sait mettre un trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) sous forme canonique.
c) Résolution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ et/ ou de $z^2 + 2z + \frac{7}{4} + i = 0$
9. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (*pour travailler le raisonnement par l'absurde*).
10. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (*pour travailler le raisonnement par Analyse/Synthèse*).
11. Soit P, Q des assertions logiques. Sans démonstration :
 - donner le contraire de l'assertion (P et Q),
 - donner le contraire de l'assertion (P \implies Q),
 - donner une assertion équivalente à (P ou Q).

PRÉVISIONS : Complexes (fin) : Racines n ième de l'unité, exponentielle complexe, applications à la géométrie et description des similitudes directes.

Logique : Ensembles.

Puis Applications (injection, surjection, bijection, notions d'image directe et réciproque).