LMB *MPSI2*

Programme de colle (semaine 2) - 29 septembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

Nombres complexes

Programme de la semaine dernière, en plus :

- **Relations coefficients-racines** (pour un polynôme de degré 2) .
- **Racines n-ièmes d'un nombre complexe.** Groupe $\mathcal{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Description, cardinal. Existence et calcul des racines n-ième d'un complexe non nul.
- **Exponentielle complexe** (définition, propriétés, relations fonctionnelles, équation $e^z = a$ pour $a \in \mathbb{C}^*$)
- **Similitudes du plan** Expression complexe des transformations affines du plan telles que réflexion par rapport à $(\mathrm{O}x)$, translations, rotations et homothéties.
  Définition d'une similitude directe *(toute application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ pour laquelle il existe $\lambda > 0$ vérifiant* $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{P}^2, f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) = \lambda \mathrm{AB}$ *et qui préserve l'orientation des angles.* On admet que les similitudes directes sont les applications qui s'écrivant comme composées de fonctions des types suivants : translations, rotations, homothéties.
  Théorème : les similitudes directes sont les applications d'expression complexe : $z \mapsto az + b$.
  Utilisation des nombres complexes en géométrie.

Éléments de logique

1. Proposition Logique. Négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence.
2. Quantificateurs $\forall$ et $\exists$
3. Méthodes de démonstration : récurrence, contraposée, raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse-synthèse.
4. Ensembles (appartenance, inclusion, opérations : intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien)

QUESTIONS DE COURS :

1. On note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$. Démontrer que $\mathcal{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ puis que $\mathcal{U}_n$ est de cardinal n. Représentation dans le plan complexe.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -1$ ou $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ et/ou pour $a \in \mathbb{C}^*$, résolution de $z^n = a$. Représentation dans le plan complexe.
   On écrit a sous forme trigo et on utilise le résultat de cours sur $\mathcal{U}_n$ une fois qu'on s'est ramené à $z^n = z_0^n$.
3. *Exo*. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$
   (a) Trouver une CNS sur n et m pour que $e^{i\frac{2\pi}{n}} \in \mathcal{U}_m$
   (b) Établir l'équivalence : ($\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m \iff n|m$)
4. *Exo (type cours)* résoudre $e^z = 1 - i$ et/ou résoudre $e^z = a$ où $a \in \mathbb{C}^*$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$).
5. Reconnaître la transformation du plan d'écriture complexe donnée par $f(z) = (1+i)z - 2$ et/ou n'importe quel exemple du type $f(z) = az + b$ où (a, b) est choisi par le colleur dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$
   ou donner l'écriture complexe d'une similitude dont les éléments caractéristiques sont donnés par le colleur; par exemple écriture complexe de : de la similitude de centre $\mathrm{I}(-1, 1)$, d'angle $\pi/4$ et de rapport 2
6. *Pour travailler sur les quantificateurs* Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, où Ḑ $\subset \mathbb{R}$. Écrire la définition formelle de chacune des assertions suivantes puis écrire leur négation.
   a) f est périodique; b) f est majorée; c) f est la fonction nulle; d) f ne s'annule pas.
7. *Pour travailler sur les notations ensemblistes*. Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de parties d'un ensemble E. Soit x un élément de E. Écrire les assertions suivantes en utilisant uniquement les symboles $\in$, $\cup$, $\cap$ et $\overline{}$ (passage au complémentaire) :
   a) «à partir d'un certain rang x appartient à tous les ensembles A_i»
   b) «x appartient à une infinité d'ensembles A_n»

8. Montrer que le complémentaire d'une réunion (quelconque) d'ensembles est l'intersection des complémentaires (ou résultat sur le complémentaire d'une intersection).

PRÉVISIONS : Applications : injectivité, surjectivité, notions d'image directe et d'image réciproque.
Puis Analyse réelle : révision de Terminale et compléments (dérivabilité d'une réciproque) et utilisation des théorèmes généraux d'analyse réelle (TVI,...) Puis étude des fonctions usuelles.