LMB *MPSI2*

Programme de colle - semaine 4- du 13 octobre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

A- Applications

injectivité, surjectivité, image directe et réciproque : **tout exercice sur le sujet.**

B - Révision d'analyse et compléments

la notion de limite est admise (pas de définition pour l'instant autre qu'intuitive). Continuité en un point, sur un domaine.

— Énoncés ci-dessous à connaître parfaitement (*)) (*résultats admis à ce stade de l'année* :

  — Passage à la limite dans une inégalité.

  — Théorème d'encadrement.
  On veillera à ce que les élèves ne confondent pas ces deux premiers résultats et qu'ils vérifient que toutes les limites existent avant de passer aux limités dans une inégalité.
  On corrigera les $\lim$ *écrits trop tôt (avant de savoir que la limite existe).*

  — Théorème des valeurs intermédiaires (dans ses différentes versions) : si f continue sur $[a, b]$ et si y est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, alors y possède au moins un antécédent dans $[a, b]$ ou "l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle".

  — Théorème de la bijection monotone *(on a admis la continuité de la réciproque).*

  — Règles opératoires sur les dérivées ; en particulier dérivée d'une composée ; *énoncés démontrés mais dans le cas de la composition $g \circ f$ on s'est contenté, pour l'instant, d'une preuve avec f injective.*
  On veillera à l'écriture $f'(x)$ et on corrigera les $(f(x))'$ qui traînent encore parfois

  — Lien entre le signe de la dérivée et la monotonie de la fonction sur des intervalles.

  — Théorème de la limite monotone (énoncé dans le cas d'une fonction monotone sur $[a, b[$ pour la limite en b dans $\bar{\mathrm{R}}$.)

  — Théorème de dérivation de l'application réciproque. *(on l'a démontré en admettant la continuité de f^{-1}).*

  — position relative des tangentes pour une fonction f convexe dérivable.Application aux fonctions usuelles ($x \mapsto \ln(1 + x)$, exp, sin...)

— Effet des transformations élémentaires du plan sur le graphe d'une fonction, en particulier, à partir du graphe d'une fonction f savoir construire le graphe de $x \mapsto f(x + a)$, de $x \mapsto f(x) + b$, de $x \mapsto f(\mathrm{T} - x)$, de $x \mapsto f(ax)$, de $x \mapsto af(x)$.
Savoir déterminer si une fonction possède une symétrie par rapport à une droite d'équation $x = a$.
NB cette année, **les élèves ne savent pas encore déterminer l'existence d'une droite asymptote oblique (ou d'une autre branche infinie)**. La notion sera vue lors du chapitre DL et équivalents.

C -Fonction puissance d'exposant réel

Définition, étude, graphe, convexité. $\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$.
Sera vu lundi seulement (donc ne pas considéré comme vu pour les colles de lundi et mardi)

— résultats de croissances comparées de ces fonctions en 0 et $+\infty$.

— *exo* : étude de $x \mapsto x^x$, et $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

NB l'utilisation des croissances comparées pour lever les indéterminations de limites sera vue lundi et sera exigible en colle à partir de mercredi.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

La colle démarrera par des définitions sur les applications : **injectivité, surjectivité, bijectivité, espace image, définition des images directes et réciproques d'une partie par une application** *car les compte-rendus de colle montrent que certains élèves ont besoin de retravailler ces notions.*

1. (a) Donner le graphe de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ à partir du graphe de $\ln$ (et position de la tangente en 0) et/ou celui de $x \mapsto \sqrt{2-x}$ à partir de $\sqrt{\cdot}$.
   (b) Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, savoir caractériser "$\Gamma_f$ a une symétrie par rapport à la droite $x = a$".
2. *Exo* Allure locale au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto \sqrt{|\ln x|}$
3. *Exo* Si f est une fonction réelle continue sur $[a, b]$ avec $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
4. *Exo* Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ possède un unique point fixe a sur $\mathbb{R}$, et que celui-ci vérifie $a \in [0, 1]$
5. *Exo* Montrer que l'application $u : x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (on a raisonné par l'absurde et utiliser le principe de composition des limites avec des suites bien choisies qui tendent vers 0.) Ou (similaire) montrer que $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.
6. *Exo* $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[1, +\infty[$. Étude de la dérivabilité de f^{-1} et expression simple de $(f^{-1})'(t)$ lorsque ça a du sens.
7. (a) Définition de la notation x^α
   (b) Démonstrations des règles sur les exposants : pour $x > 0, y > 0, \alpha, \beta$ réels, valeurs de $x^{-\alpha}$, $x^{\alpha+\beta}$, $(x^\alpha)^\beta$, et $(xy)^\alpha$.
   (c) Graphes de $x \mapsto x^\alpha$ (sans démonstration) selon les valeurs de α. *On précisera quels exposants α ont permis un prolongement par continuité en 0 et parmi eux ceux qui donnent une fonction dérivable en 0.*
8. *Exo* Déterminer l'expression de la dérivée $n$ième de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. *On veillera à ce que les élèves écrivent $1/x^n = x^{-n}$ pour dériver comme une fonction puissance.*
9. *pour corriger un DM.* Soit ω un nombre irrationnel. Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2, (a + b\omega = 0 \implies a = 0 \text{ et } b = 0)$$

PRÉVISIONS : Sem 6 Étude de $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, ch, sh, th et probablement Sem 7 : techniques de calcul intégral.