Programme de colle - semaine 6 - semaine du 10 novembre

Le cours doit être parfaitement su.

Complément de calcul intégral

1) Préliminaire sur les dérivées et primitives d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$
2) Techniques de calcul intégral :

- Intégration par parties et changement de variables. *NB : écrit au programme officiel . "Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité".*
- Utilisation des symétries ou des périodes pour un calcul d'intégrales.
- Primitives des fonctions rationnelles du type $1/(x^2+px+q)$ où p et q réels.
- Primitives d'une fonction d'expression $1/(x-z_0)$ où $z_0 \in \mathbb{C}$.
- Méthode pour le calcul des primitives des polynômes en sin et cos.
- Rappel des techniques d'encadrement pour les intégrales.

QUESTIONS DE COURS :

1. Existence et calcul pour $x \in [-1,1]$ de $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$
2. Existence et calcul de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ (on donne le changement de variable $x = \tan(t/2)$).
3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$. Indication : changement de variable $x = \tan(\theta)$ ou IPP en partant de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
4. Primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+5x-6}$ en précisant les intervalles où elles sont valables *(ou un exemple similaire au choix du colleur)*
5. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$.
6. Primitives de $f : x \mapsto 1/(x-z)$ où $z \in \mathbb{C}$ fixé, en distinguant $z \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
7. *Transformée de Laplace.* Si $p \in \mathbb{C}$ vérifie Re p > 0, montrer que $\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \cos(x)e^{-px}\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$ en calculant sa valeur *(on note* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-px}\mathrm{d}x$ *cette limite finie).*
   On utilisera
   $$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
   ou une double intégration par parties.
8. *Exo* Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la suite est bornée.
   (b) Si on suppose f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ montrer que $\lim u_n = 0$.
9. On note $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est bien définie, qu'elle est monotone et convergente vers 0.
   (b) À l'aide d'une IPP, montrer que $\mathrm{I}_n \sim \frac{1}{2n}$. *Note au colleurs, on vient de commencer le cours sur les équivalents, la notation $\sim$ doit être connue, mais aucun exercice sur les équivalents dans cette colle, les élèves doivent simplement démontrer que $n\mathrm{I}_n$ tend vers $1/2$...*
10. **Intégrales de Wallis** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathrm{W}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$. Calculer W_0 et W_1 et en déduire l'expression de W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n.

PRÉVISIONS : Colle sur les DL et développements asymptotiques