Programme de colle numéro 3 - semaine du 6 octobre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

Notion d'applications

1. Définition. Graphe. Image et antécédent. Restriction et prolongement.
2. Composition. Définitions, exemples. Associativité de la composition.
3. Injection, surjection, bijection. Propriété de la composée. Bijection réciproque.
4. Image directe et image réciproque d'une partie.
5. Familles. Définition. Exemple des suites. Famille de parties. Partition d'un ensemble.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

La colle commencera par la **vérification de la connaissance précise des définitions du cours Applications** : fonction injective, surjective, bijective et définition d'une image directe d'une partie par une fonction ou d'une image réciproque d'une partie par une fonction. Ensuite Questions de cours :

1. *Exo (pour travailler la correction du DS)*
   (a) Montrer que pour $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ et $z \neq 1$, on a l'équivalence suivante :
   $$\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} \Longleftrightarrow z = -i \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (e) d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:
   $$(e) : \qquad 1 + \frac{z+1}{z-1} + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n-1} = 0$$
   Résoudre l'équation dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. On exprimera les solutions trouvées à l'aide de la fonction cotan et on précisera le nombre de solutions distinctes trouvées.
2. Associativité du produit de composition
3. *Exo* Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on considère $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ qui à $f \in \mathrm{E}$ associe l'application $\mathrm{T}(f)$ définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{T}(f)(x) = f(x+a)$$
   (a) Déterminer $\mathrm{T} \circ \mathrm{T}$ (c'est-à-dire expliciter pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{T} \circ \mathrm{T}(f)(x)$ en justifiant.
   (b) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^{\circ n} := \mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \cdots \circ \mathrm{T}$ (T composée n fois) en démontrant la réponse rigoureusement.
4. *résultat de cours*
   Démontrer que si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont injectives (respectivement surjectives) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).
5. *résultat de cours*
   Démontrer que pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, :
   $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective et
   $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective .
6. *résultat de cours*
   Démontrer que si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}$, on a
   $$(g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathrm{B})\right) \text{ et } g \circ f(\mathrm{A}) = g\left(f(\mathrm{A})\right)$$
7. *Exo* Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On considère les applications suivantes : $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}\right.$, $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{z} \end{array}\right.$, $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{array}\right.$ et $\cos \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \end{array}\right.$
   Étudier, pour chacune des applications suivantes, l'injectivité, la surjectivité et préciser l'espace image.
   (On s'appuiera sur le cours Nombres complexes : par exemple, l'étudiant doit savoir donner le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$ en fonction de $a \in \mathbb{C}$ mais n'est pas obligé de le redémontrer.)
8. *Exo*
   Soit E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et A et A′ deux parties de E. Montrer que l'on a $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}') \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{A}')$.
   Montrer par un exemple que l'inclusion inverse est fausse en général.
   Montrer que, si l'on suppose f injective, alors on a l'égalité $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{A}') = f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{A}')$.
9. *Exo (pour travailler les méthodes de démonstration et les notations du cours)*
   Soit f une application de A dans B.
   Montrer que f est surjective si et seulement si quelle que soit la partie Y de B, on a $f(f^{-1}(\mathrm{Y})) = \mathrm{Y}$.

PRÉVISIONS : Révision et compléments d'analyse réelle (à ce stade les résultats sont admis), puis étude des fonctions usuelles (fonction puissance d'exposant réel, arcsin, arccos, arctan, ch, sh, th).