

Programme de colle - semaine 8 - semaine du 17 novembre PAS DE COLLE

Il n'y aura pas de colle cette semaine, les élèves n'ayant pas encre pratiqué d'exercices sur les DLS. La liste des questions de cours est publiée pour préparer l'interro de cours du mercredi 19 novembre.

La formule de Taylor-Young et les DL en 0 des fonctions usuelles suivantes doivent être connus par cœur :

$$(*) \quad \begin{aligned} &\text{à tout ordre : } \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x), e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha. \\ &\text{à l'ordre 3 : } \arctan x \text{ et } \tan x \end{aligned}$$

1. Équivalent au voisinage de 0 des fonctions usuelles : $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\sin x$, $1 - \cos x$, $\tan x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x - 1$, $\arctan x$ etc
Savoir utiliser les équivalents pour déterminer une limite. Exemple :

$$\frac{\arctan(x) - x}{(e^x - 1)^2} \text{ Limite de } f \text{ en 0}$$
2. Établir $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$
3. Énoncer la formule de Taylor-Young (démo non demandée). Puis application au DL de \exp en 0 ou de \sin en 0 ou de $(1+x)^\alpha$.
4. Exo de cours : trouver le DL en 0 à l'ordre $2n+1$ de \arctan
5. Exo : déterminer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 5 de la fonction \arcsin
6. Exo : On pose $h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$.
 - (a) Donner le domaine D de définition de h .
 - (b) Montrer que h se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty [$
7. Exo : sachant que $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, retrouver à l'aide du théorème de primitivation le DL de $\tan x$ en 0 à l'ordre 3 puis 5 (éventuellement 7)
8. Exo : déterminer le DL en 0 à l'ordre 5 de $\ln(\cos x)$.
9. Trouver le DL de $f(x) = \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 et en déduire la position relative de la tangente en 0 par rapport à la courbe de f au voisinage de 0.
10. Exo :
 - (a) Donner le développement asymptotique de $f(x) = \frac{1}{x+1}$ au voisinage de $+\infty$ (2 termes)
 - (b) Trouver le DL de $1/x$ au voisinage de 3 à l'ordre 4.
 - (c) Déterminer le DL de $\ln(x)$ au voisinage de 2 à l'ordre 3
11. Développement asymptotique en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, branche infinie en $+\infty$ (équation de l'asymptote et position par rapport à celle-ci).