Programme de colle - semaine 10 - 8 décembre

Le cours doit être parfaitement su.

A) Révision

Tout exercice sur les thèmes Calcul de primitives, encadrement d'intégrales, Développements limités, Equations différentielles.

B) Relations binaires

- Relations d'équivalence.
- Relations d'ordre.

1. Ordre total, ordre partiel, plus grand élément, plus petit élément.
   Propriété de $\mathbb{N}$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Conséquence : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
2. Si A est une partie d'un ensemble ordonné E, définition d'un majorant de A de E, d'un minorant de A dans E. Partie majorée, minorée, bornée.
   Définition de la borne supérieure et inférieure d'une partie A de E. ensemble totalement ordonné.
3. Propriété de la borne sup (borne inf) pour $\mathbb{R}$ (admise) : toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée possède une borne sup.
   Caractérisations de la borne sup dans $\mathbb{R}$:
   — $b = \sup \mathrm{A}$ ssi b est un majorant de A et si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a \in \mathrm{A}$, $b - \varepsilon < a$;
   — $b = \sup \mathrm{A}$ ssi b est un majorant de A et s'il existe une suite de points de A qui converge vers b. (admis, sera justifié dans le chapitre *suites réelles*)
   Caractérisations analogues pour les bornes inf.

C) Nombres réels

1. Inégalités dans $\mathbb{R}$: révision des propriétés des valeurs absolues, inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ (admise à ce stade de l'année) et corollaire : inégalité de Minkowski (inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$).
2. Définition de la partie entière (notation $\lfloor \cdot \rfloor$). Propriétés de la partie entière, de la partie fractionnaire.
3. Valeur approchée par défaut, par excès d'un réel à une précision donnée.
4. Approximation d'un réel par un nombre décimal à 10^{-n} près.
5. Définition de parties denses. Exemples : densité des nombres décimaux dans $\mathbb{R}$, densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En exercice densité des nombres dyadiques.
6. Parties convexes de $\mathbb{R}^n$ (définition). Et résultat : les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

QUESTIONS DE COURS :

1. Soit deux suites réelles bornées telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, demander de comparer les inf et les sup

2. Énoncer la caractérisation séquentielle d'une borne inf (ou d'une borne sup) d'une partie A de $\mathbb{R}$ (sans démonstration). Application : déterminer $\inf_{\mathbb{R}} \mathrm{A}$ où $\mathrm{A} = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$.
3. *Exo* Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour un réel x fixé, on appelle distance de x à la partie A la quantité
$$d(x, \mathrm{A}) = \inf\{\, |x-a|,\, a \in \mathrm{A}\,\}$$
   (a) Montrer que $d(x, \mathrm{A})$ est bien définie pour tout réel x.
   (b) Soit x, y deux réels fixés. Justifier que $\forall a \in \mathrm{A},\ d(x,\mathrm{A}) \leq |x-y| + |y-a|$. En déduire
$$d(x,\mathrm{A}) \leq |x-y| + d(y,\mathrm{A})$$
   (c) Établir que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A})| \leq |x-y|$
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Énoncé avec les cas d'égalité (sans démonstration : nous l'avons admis pour l'instant). Corollaire : Inégalité de Minkowski (inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$) (vous pouvez demander la démonstration du corollaire).
5. Justifier les propriétés suivantes sur la partie entière : $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
6. Demander la définition d'une partie dense de $\mathbb{R}$. Puis démo de : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (éventuellement ensuite $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

   Chapitre Suites (juste commencé). Cette semaine Uniquement les Questions de cours suivantes sur la définition formelle d'une limite finie. Aucun exercice utilisant la définition formelle cette semaine.
7. Demander la définition formelle de u tend vers ℓ si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
   Puis demo : toute suite convergente est bornée et/ou unicité de la limite.
8. Limite d'une somme et/ou d'un produit de suites convergentes.
9. Si u_n converge vers un réel ℓ non nul, u_n est du signe de ℓ APCR et limite de $1/u_n$.

Note aux colleurs : Cette semaine, les exercices pourront porter sur les thèmes : relations d'équivalence, relations d'ordre, sup/inf, partie entière, inégalités dans $\mathbb{R}$, parties denses et/ou exercices sur les chapitres précédents (intégrales, encadrement d'intégrales, Développements limités et Équations différentielles linéaires). Vos exercices peuvent comporter des suites, en restant dans le cadre du programme du lycée. Aucun exercice cette semaine sur la convergence des suites avec la définition formelle mais seulement des questions de cours parmi celles citées ci-dessus.

PRÉVISION : Suites