Programme de colle semaine 12 - semaine du 5 janvier

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours. Le cours doit être parfaitement su.

Suites réelles et complexes

Tout le chapitre y compris les suites complexes ou les suites définies de manière implicite, les exercices type découpage à la Cesàro, etc.

Groupes

1. Définition, exemples de groupes commutatifs ou non, groupe des bijections d'un ensemble. Groupe produit.
2. Sous-groupe : définition, des exemples : $n\mathbb{Z}$ (sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$), groupe des racines n ième de l'unité et groupe des nombres complexes de module 1 (sous-groupes de $(\mathbb{C}^*,\times)$), groupe des similitudes directes (sous-groupe des bijections de $\mathbb{C}$ pour la loi $\circ$)).
   Détermination des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
   L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe.
3. Morphisme de groupes. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Propriétés opératoires. L'image directe ou réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe. Noyau d'un morphisme, caractérisation de l'injectivité.
   La composée de morphismes est un morphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Groupe des automorphismes d'un groupe.

N.B. Les notions suivantes : ordre d'un élément, groupes monogènes et cycliques, et les résultats tels que le théorème de Lagrange ne figurent pas dans le cours de première année.

N.B. Les structures Anneaux, corps seront vues la semaine de la rentrée. Cette semaine, vous pouvez poser des questions de cours sur les groupes ou les suites et poser des exercices sur les suites et sur les groupes. Les groupes seront encore au programme la semaine suivante avec en plus la structure d'anneaux.

QUESTIONS DE COURS :

1. Exercice Montrer que de toute suite réelle qui tend vers $+\infty$, on peut extraire une suite croissante.
2. Exercice Soit u une suite à valeurs strictement positives et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe. On note $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
   (a) On suppose que $0\leq\ell<1$. Montrer que $\lim u_n=0$ *(on a choisi $\rho\in]\ell,1[$, et établi $u_n=\mathrm{O}(\rho^n)$)*
   Application : pour tout complexe z, la suite de terme général $\frac{z^n}{n!}$ tend vers 0.
   (b) Montrer que si $\ell>1$, alors $u_n\to+\infty$.
3. Exercice
   (a) Soit $q\in\mathbb{C}$ tel que $|q|=1$ et $q\neq 1$. Montrer que la suite $(q^n)_n$ est divergente.
   (b) En déduire que $(e^{in})_n$ est une suite divergente puis établir que les suites $(\cos(n))_n$ et $(\sin(n)_n$ sont toutes les deux divergentes.
4. Détermination des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (on a admis et utilisé la division euclidienne)
5. Propriétés sur l'image du neutre, l'image de x^{-1}.
   Structure de groupe pour $(\mathrm{Aut(G)},\circ)$.
6. Si $f:\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ est un morphisme de groupes, l'image réciproque (respectivement l'image directe) d'un sous-groupe H' de G' (resp. d'un sous-groupe H de G) par f est un sous-groupe de G (resp. de G'). Application : structure de $\ker f$ et $\mathrm{Im}\ f$
7. Si $f:\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ est un morphisme de groupes, alors f est injective si et seulement si $\ker f=\{e_{\mathrm{G}}\}$
8. Vérifier que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et donner leur image et leur noyau.
   (a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$, $t\mapsto e^{it}$;
   (b) si $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, $g_n:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$, $z\mapsto z^n$;
   (c) $\varphi:\mathbb{R}[\mathrm{X}]\to\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}\to\mathrm{P}'$;

9. Exo : Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe et $x \in \mathrm{G}$ fixé. On considère $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathrm{G} \\ k & \mapsto & x^k \end{array} \right.$

   (a) Vérifier que φ est un morphisme de groupes. En déduire que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-groupe de G, dit sous-groupe engendré par x. On le notera $< x >$.

   (b) En considérant $\ker \varphi$, montrer que le sous-groupe engendré par x est :

   — soit infini et isomorphe à $\mathbb{Z}$ *(groupe monogène infini)* ;

   — soit fini, de la forme $< x >= \{e, x, x^2, \dots, x^{a-1}\}$ où a est un entier ≥ 1 tel que

   $$\forall k \in \mathbb{Z},\ (x^k = e \Longleftrightarrow a|k)$$

   (dans ce cas, on dit que x est un élément d'ordre a, $< x >$ est groupe fini de cardinal a, on dit groupe cyclique).

   (c) *Exemples* Dans chacun des cas suivants on indique le groupe G et l'élément x choisi. Décrire le sous-groupe engendré par x : $< x >$ obtenu.

   a. $\mathrm{G} = \mathbb{R}^*$ muni du produit usuel, et $x = 2$.
   b. $\mathrm{G} = \mathbb{C}^*$ muni du produit usuel et $x = e^{i\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$.
   c. G est le groupe des bijections du plan et $x = \mathrm{T}_u$ la translation de vecteur u où u est un vecteur fixé non nul.
   d. G est le groupe des bijections du plan et $x = s_{\mathrm{O}}$ la symétrie centrale de centre O
   e. G est le groupe des bijections du plan et $x = r$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{\mathrm{N}}$.

PRÉVISIONS : Structures (groupes, anneaux, corps).

Bonnes vacances et belles fêtes de fin d'année !

N.B. La classe MPSI2 part travailler à la montagne du 18 au 24 janvier 2026. Il n'y aura pas de colle la semaine correspondante