Programme de colle semaine 15 - 26 janvier

Le cours doit être parfaitement su.

Cette semaine, les exercices porteront sur l'arithmétique (voir programme de la semaine 13) ou sur l'algèbre linéaire (le début).

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Tout exercice sur le sujet

Algèbre linéaire (sans dimension) (le début)

1 - Espaces Vectoriels, sous-espaces vectoriels

Selon le programme MPSI, K désigne un corps qui est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1. Espace vectoriel : Définition. Exemples fondamentaux.
   Espace de la géométrie vectorielle classique.
   Structure de K-ev de K^n pour $n \in \mathbb{N}$. Espace vectoriel des polynômes $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.
   Si F est un K-ev et X un ensemble (non vide), l'ensemble des applications de X dans F admet une structure de K-ev. Espaces de fonctions, de suites.
   Produit cartésien d'espaces vectoriels.
   Si K est un sous-corps de L, tout L-ev admet une structure de K-ev.
2. Sous-espace vectoriel : définition. Exemples : ex de sev de $\mathbb{R}^3$ défini par des équations ; $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$ sev de $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$; l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites bornées, l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes sont des sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{C}^0[\mathrm{I}]$, $\mathcal{D}^1(\mathrm{I})$ et l'ensemble des fonctions solutions d'une EDL homogène (sur l'intervalle I) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

   Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Définition de $\mathrm{Vect}\ (\mathcal{F})$ sev engendré par une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
   Familles génératrices d'un espace vectoriel. Exemples.

2 - Applications linéaires

1. Application linéaire : définition. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme d'espaces vectoriels. Forme linéaire. Exemples : exemple en géométrie, ex d'applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, la dérivation, homothéties.

   Prop : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'image directe d'un sev E_1 de E par f est un sev de F et l'image réciproque d'un sev F_1 de F par f est un sev de E.
   Définition de l'image et du noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
2. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (sev de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$). La composée d'applications linéaires est linéaire. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Cas particulier des endomorphismes d'un ev E : structure d'anneau de $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ)$.
   Groupe linéaire de E noté $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$: groupe des automorphismes de E.

3 - Sommes, sommes directes, supplémentaires et projecteurs

1. Somme. Définition de la somme de deux sev.
2. Somme directe (définition : la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe si la décomposition est unique).
   Caractérisation : $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe si et seulement si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$.

3. Sous-espaces supplémentaires dans E. Exemples.
4. Somme et somme directe de $n \geq 3$ sev de E. Caractérisation par l'unicité de l'écriture du vecteur nul.
   Exercice du cours : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors $\ker(f)$, $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ sont en somme directe.
5. Projecteurs. Définition. Image, noyau. Caractérisation par $p \circ p = p$.

N.B. le cours n'est pas fini et peu d'exercices ayant été abordés, il faudra surtout vérifier les notions de base au cours des exercices cette semaine.

Le programme de colle de la semaine prochaine sera encore sur l'algèbre linéaire (même programme, on ajouter seulement les symétries vectoriels, hyperplans et quelques petits compléments au cours.

La notion de famille libre sera vue au début du chapitre sur la dimension finie. Pour l'instant, seules les notions de combinaisons linéaires et de familles génératrices sont exigées.

QUESTIONS ou exos DE COURS :

1. Infinité de l'ensemble des nombres premiers.
2. Exo : Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
3. Savoir démontrer qu'une partie d'un ev est un sev d'un ev de référence. Par exemple :
   (1) $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \; x - 2y + 3z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ (et donner une famille génératrice).
   (2) $\mathrm{F} = \{y \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R}) \;/ y'' + 2x^2y' - 3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ou de $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$, ev des applications deux fois dérivables.
   (3) $\mathrm{F} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
4. a) Savoir démontrer qu'une application est linéaire (sans faute d'homogénéité), par exemple linéarité de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f(0)$ ou de $\sigma : u \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}} \mapsto \sigma(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
   b) Détermination des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, alors $\ker f$ est un sev de E et/ou $\mathrm{Im}\, f$ un sev de F.
6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_{\mathrm{E}}\}$
7. Exo : pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, on a : $(g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \ker g)$.
8. Définition d'une somme et d'une somme directe de sous-espaces vectoriels de E.
   Pour F et G deux sev d'un K-ev E, caractérisation de la somme directe par $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$
   Pour $n \geq 3$ sev de E, caractérisation de la somme directe.
9. Caractérisation des projecteurs : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifie $f \circ f = f$ alors $\mathrm{E} = \ker(f - \mathrm{id} - g) \oplus \ker(f)$ et f est la projection vectorielle de E sur $\ker(f - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(f)$.

N.B. Le colloscope a changé au semestre 2 et les trinômes de colle aussi. Le nouveau colloscope est en ligne.

PRÉVISIONS : Espaces vectoriels et Applications linéaires (sans dimension) suite.