Programme de colle de la semaine n°18 - semaine du 16 février

Le cours doit être parfaitement su.

Révision

Exercices sur le chapitre Nombres complexes (calcul en lien avec les calculs fréquemment trouvés dans les exercices des polynômes : **racines n ième de l'unité, techniques de calcul (angle moitié, factorisation, etc), trigonométrie.**

Polynômes à une indéterminée

1) L'algèbre $K[X]$ (dans le cours K est un sous-corps de $\mathbb{C}$)

1. Définition formelle : construction par les suites à support fini. Opérations : $+$, $.$, $\times$.
   Structure : $(K[X], +, \times)$: anneau des polynômes, intègre.
   Notation définitive $X = (0, 1, 0, 0, ...)$.
   Propriétés des degrés (somme, produit).
2. Substitution par un élément $x \in A$ si A est une K-algèbre. Exemple avec $A = K$: , avec $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, avec $A = \mathcal{L}(E)$ (polynômes d'endomorphismes), avec $A = M_n(K)$, avec $A = K[X]$.

2) Arithmétique dans $K[X]$

1. Relation de divisibilité. Polynômes associés.
   Division euclidienne dans $K[X]$. Si $B \neq 0$, existence et unicité du couple (Q, R) vérifiant $A = BQ + R$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.
2. PGCD. Calcul du pgcd par l'algorithme d'Euclide.
3. Relation de Bezout. Lemme de Gauss.
4. ppcm.
5. Polynômes irréductibles. Décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles.

3) Racines et factorisation

1. Racines simples, racines multiples. Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine.
   Factorisation de P par $(X - \alpha_1)^{n_1} \dots (X - \alpha_r)^{n_r}$, si les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont racines de P d'ordres $n_1, \dots, n_r$. Majoration du nombre de racines (comptées avec leur multiplicité) par le degré.
   Polynômes scindés, scindés à racines simples.
2. Polynôme dérivé : définition formelle. Opérations et dérivation.
   Dérivée n-ième. Linéarité, formule de Leibniz (dérivée de $(PQ)^{(n)}$), formule de Taylor pour les polynômes.
3. Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés.

4) Factorisation dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. Théorème fondamental de l'algèbre (admis) : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé. Liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ (polynômes de degré 1 et de degré 2 sans racine réelle), forme factorisée.

5) Relations coefficients racines

Fonctions symétriques élémentaires des racines d'un polynôme scindé. Lien avec les coefficients.

QUESTIONS ou EXOS de COURS :

1. (exo Polynômes de Lagrange) Soit K un corps (qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

   a) On considère $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & K^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array} \right.$. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer son noyau.

   b) Démontrer que la restriction φ_n, de φ à $K_n[X]$ est injective.

   c) Expliciter pour $i \in [\![0, n]\!]$, un polynôme L_i de $K_n[X]$ tel que $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right.$.

   Justifier que ces polynômes $L_0, \dots, L_n$ sont uniques dans $K_n[X]$.

   d) Soit $b = (b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1}$. Montrer que le polynôme $\sum_{i=0}^{n} b_i L_i$ est l'unique polynôme P de $K_n[X]$ vérifiant $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i$.

   e) Soit $b = (b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1}$. Résoudre l'équation $\varphi(P) = b$ d'inconnue $P \in K[X]$.

2. Écrire la formule de Taylor (avec ou sans démo, au choix de l'élève). Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives. (Énoncé et démo)

3. **a)** Pour $P = (X-a)^n Q$ où $Q \in K[X]$, expression de $P^{(n)}(a)$ en fonction de $Q(a)$ *(soit en utilisant la formule de Taylor (à privilégier), soit en appliquant la formule de dérivation de Leibniz à $U = (X-a)^n$ et $V = Q$ en remarquant que a est racine d'ordre n de U).*

   b) Application : Si $P = (X^2 - 1)^n$, déterminer $P^{(j)}(\pm 1)$ pour $j \in [\![0, n]\!]$. Préciser aussi $P^{(2n)}$.

4. (exo) Soit $P \in K[X]$. 1) Si P et P' sont premiers entre eux, alors les racines de P sont simples. 2) si $K = \mathbb{C}$ la réciproque est vraie.

5. Écrire les relations coefficients/racines pour un polynôme scindé de degré n. On exigera d'écrire les formules pour σ_1, σ_2 avant d'écrire σ_k et on demandera de préciser le cas particulier de σ_n. Si $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont les racines, savoir (par exemple) calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires des x_i puis en fonction des coefficients du polynôme.

6. (exo) Soit $n \geq 2$. On définit le polynôme P_n dans $\mathbb{C}[X]$ par : $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$

   a) Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$

   b) En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \cot\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$

7. (exo) Factoriser $X^4 + 16$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$: (recherche des racines complexes, puis regroupement des racines conjuguées 2 à 2 pour former des facteurs réels)

8. (exo) On a déjà vu l'existence pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ du polynôme de Chebychev $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, à coefficients entiers, vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, avec les relations $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \geq 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$. *On ne demande pas de réexpliquer cela*

   a) Démontrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'unicité d'un tel polynôme.

   b) Déterminer les racines de T_n et écrire la factorisation de T_n

PRÉVISIONS : Espaces vectoriels de dimension finie.