

Programme de colle - semaine 19 - 9 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Algèbre linéaire : la théorie de la dimension finie

1- Familles libres, familles génératrices, bases

1. Familles génératrices (rappel).
2. Familles libres, familles liées. Des exemples : dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les familles de polynômes de degré échelonnés sont libres dans $K[X]$.
3. Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
4. Famille génératrice d'une somme de sev, famille libre d'une somme directe, base d'une somme directe par concaténation de bases, caractérisation d'une somme directe.

2 - Théorie de la dimension

1. Théorème de la base incomplète. Conséquence : en dimension finie ($E \neq \{0\}$), existence d'une base finie.
2. Dimension d'un ev. Exemples : K^n , $K_n[X]$, bases canoniques de ces espaces vectoriels, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
Si $\dim E = n$, les familles libres de E ont au plus n vecteurs et les familles génératrices de E ont au moins n vecteurs.
Caractérisation des bases en dimension finie : si E de dimension n , toute famille libre (respectivement génératrice) de E ayant n vecteurs est une base de E .
3. Dimension de $E \times F$
4. Si E de dim finie, un sev F est de dimension avec $\dim F \leq \dim E$. De plus si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.
Dimension d'une somme $F + G$ (formule de Grassmann) (preuve géométrique par construction d'une base.)
Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
Propriété : Si $F_1, \dots, F_n$ sont n sev de E , tous de dimension finie, $\dim(\sum F_i) \leq \sum \dim F_i$ avec égalité si et seulement si $\sum F_i = \oplus F_i$
Existence de supplémentaires en dimension finie.

3 - Dimension finie et applications linéaires

Dans ce paragraphe, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E et/ou F sont de dimensions finies (selon les cas).

1. L'image d'une famille libre de E par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective est une famille libre dans F . Détermination de $\text{Im } f$ à partir d'une famille génératrice de E . Caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base.
2. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs de $f(\mathcal{B})$ si $\mathcal{B}$ est une base de E .
3. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Exemple de base de E^* , base duale d'une base de E . *NB : je n'ai pas donné de bases de $\mathcal{L}(E, F)$, j'attends l'écriture matricielle pour cela.*
4. si E de dim finie, E est isomorphe à F ssi F est de dimension finie égale à celle de E . Isomorphisme entre un ev de dimension n et K^n si une base de E est fixée.
5. Théorème du rang : Si E est un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
1) La restriction de f à un supplémentaire G du noyau réalise un isomorphisme de G sur $\text{Im } f$
2) $\dim E = \dim \ker f + \text{rg } f$
6. Injectivité. Caractérisation par $\text{rg } f = \dim E$ ou $\dim \ker f = 0$
7. Surjectivité : caractérisation avec $\text{rg } f = \dim F$
Comparaison des dimensions de E et F si f injective, surjective ou bijective.

8. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

Théorème : si $\dim E = \dim F$ (finie), une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective ssi elle est bijective ssi elle est surjective.

En particulier : pour un endomorphisme en dimension finie : injectivité équivaut à surjectivité.

Exercice : si E et F sont deux ev de même dimension finie, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifient $g \circ f = \text{id}_E$ alors f est un isomorphisme de réciproque g .

N.B. nous n'avons pas encore abordé les calculs effectifs de rangs (avec les matrices). Pas de questions sur ces notions cette semaine.

QUESTIONS DE COURS : Tout énoncé d'un résultat du cours sur la dimension finie. Pour les démos :

1. Liberté dans le $\mathbb{C}$ -ev des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la famille $(f_i)_{i \in [1, n]}$ si $f_i : t \mapsto t^i e^t$.
Justifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_i)_{i \in [1, n]}$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que les sous-espaces $(\ker(f - \lambda_i \text{id}))_{i \in [1, n]}$ sont en somme directe.
En déduire que si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sont des vecteurs non nuls tels que $f(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i$, la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est libre dans E .
3. Exercice : Soit E un K -ev de dimension n , et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On note r le plus petit entier naturel qui vérifie $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - (a) Justifier qu'il existe x_0 dans E tel que la famille $\mathcal{B}_0 = (x_0, f(x_0), \dots, f^{r-1}(x_0))$ est libre dans E .
 - (b) En déduire que $r \leq n$ puis que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si f est injective, l'image d'une famille libre de E par f est une famille libre de F .
Si $\mathcal{B}$ est une base de E , f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathcal{B})$ une base de F .
NB : on se contentera de demander les preuves quand les familles de vecteurs (génératrices, libres ou bases) sont finies.
5. Si F et G sont deux sev de dimension finie d'un ev E , dimension de $F + G$ (démonstration par construction d'une base)
6. Théorème du rang.
7. Équivalence entre injectivité, bijectivité et surjectivité pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de même dimension finie (*explications au choix de l'élève : soit à partir du théorème du rang, soit à partir des connaissances sur l'image d'une base par une application linéaire injective, ou surjective ou bijective.*)
+ Exercice : si E et F sont deux ev de même dimension finie, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifient $g \circ f = \text{id}_E$ alors f est un isomorphisme de réciproque g .
8. Exo. (Sera vu lundi) Soit $\varphi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$
Justifier que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son noyau puis son image.

PRÉVISIONS : calculs de rangs (pivot de Gauss sur la matrice d'une famille de vecteurs), équation d'un hyperplan. Puis chapitre Dérivation

Bonnes vacances !