

Programme de colle semaine n° 21 - semaine du 23 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Pour une fonction à valeurs réelles : **Théorèmes de Rolle, égalité des accroissements finis.**

Pour une fonction à valeurs réelles ou complexes : **inégalité des accroissements finis, inégalité de Taylor-Lagrange** (admis à ce stade de l'année).

Applications : monotonie d'une fonction réelle sur un intervalle, **théorème sur la limite d'une dérivée.**

Fonctions réelles convexes sur un intervalle de \mathbb{R} : définition puis interprétation géométrique : la courbe de f est située en dessous de ses cordes. Inégalité de Jensen.

Croissance des pentes des cordes dont une extrémité est fixée. Inégalité des trois cordes.

Convexité et dérivabilité : si f est convexe et dérivable en x_0 , la courbe de f est située au-dessus de sa tangente en x_0 . Pour une fonction f dérivable, f est convexe ssi f' est croissante. Pour f deux fois dérivable, f est convexe ssi f'' est positive.

Inégalités classiques de convexité.

2- Étude pratique de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Représentation graphique : courbe de f , droite $y = x$. Détermination d'un intervalle stable par f contenant u_0 (et donc tous les termes de la suite) et sur lequel les propriétés utiles (position relative par rapport à $y = x$ ou monotonie de f ou caractère contractant) sont vérifiées.

Résultats vus en cours :

1. Définition de la suite : recherche d'une partie $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f contenant u_0 .
2. Si u converge vers ℓ et f continue en ℓ , lien entre points fixes de f et limite de u .
3. Cas où $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur un intervalle stable par f et contenant u_0 .
4. Cas où f est contractante (k -lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$) sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 et un point fixe ℓ .
5. Cas où f est croissante sur un intervalle I contenant tous les u_n : u est monotone, le sens de monotonie se détermine par la comparaison de u_0 et u_1 .
6. Cas où f est décroissante sur un intervalle stable par f contenant u_0 : monotonie des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

N.B. La méthode de Newton, les notions de vitesse de convergence quadratique feront l'objet d'un TD. Les notions de points fixes attractifs $|f'(\ell)| < 1$ ou répulsifs $|f'(\ell)| > 1$ seront vus en exercice, mais ne sont pas des résultats de référence de cours.

QUESTIONS DE COURS :

1. *Exercice* : domaine de définition et étude de la dérivabilité de $f(x) = \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
2. *Exercice* : soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{-1/x^2}$.

(a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2}$$

(b) Montrer que f admet un prolongement en 0 qui définit une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

3. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{C})$ puis prouver l'une des 3 inégalités choisies par le colleur :

— $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

— $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ (avec $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{tz}$)

— pour $x \in [0, 1], \ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.

4. *Exercice* Inégalité de convexité. Justifier les inégalités suivantes :

(a) $\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$

(b) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

(c) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \arctan(x) + \arctan(y) \leq 2 \arctan\left(\frac{x+y}{2}\right)$

5. *Exercice* Si f est convexe sur un intervalle I et possède un minimum local en $a \in I$, ce minimum est un minimum global. On a utilisé la croissance de $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sur $I \setminus \{a\}$

Dans les questions suivantes, I désigne un intervalle réel, f définie sur I à valeurs dans I et u une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Justifier que si $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$ et si f est croissante sur I , alors u est monotone. À traiter en exemple : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ avec $u_0 \geq -1$, convergence de u .
7. *Exercice* Exemple d'utilisation de l'inégalité des accroissements finis Convergence de la suite récurrente $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$
8. Résolution d'une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ sur un exemple choisi par le colleur.
9. À partir de mercredi, *exercice* (on donnera l'énoncé à l'élève) Soit $f : I \rightarrow I$ de classe C^1 sur l'intervalle I et $\ell \in I$ un point fixe de f . Soit $u_0 \in I$ et u la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite est bien définie car $f(I) \subset I$.

(a) On suppose $|f'(\ell)| < 1$.

Montrer qu'il existe un intervalle de la forme $J = [\ell - \eta, \ell + \eta]$ avec $\eta > 0$ tel que $J \cap I$ est stable par f et pour lequel, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in J \cap I$, la suite u converge vers ℓ .

Si de plus $f'(\ell) = 0$, et f de classe C^2 sur I , justifier $(u_{n+1} - \ell) = O(u_n - \ell)^2$

(b) Si $|f'(\ell)| > 1$, démontrer que la suite récurrente u est soit stationnaire à ℓ , soit elle ne converge pas vers ℓ .

PRÉVISIONS : suites récurrentes linéaires d'ordre 2, Matrices