

Le cours doit être parfaitement su.

## Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Savoir déterminer le terme général des suites réelles ou complexes vérifiant  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{C}^2$ )

## Matrices

### A - Matrices : structure

- Définition. Structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , dimension. Base : matrices élémentaires
- Transposition. Matrices symétriques et antisymétriques.
- Produit matriciel. Propriétés. Structure d'anneau pour  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (non commutatif, ayant des diviseurs de zéro). Sous-anneau des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures.
- Trace d'une matrice carrée et propriété  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  pour  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ .
- Puissances et inverse éventuel d'une matrice carrée. Inverse d'un produit de matrice carrées inversibles. Groupe linéaire d'ordre  $n$ . *Nous n'avons pas encore abordé le calcul effectif d'un inverse de matrice.*

### B - Matrices, applications linéaires (sans changements de bases cette semaine)

- Matrice d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  relativement à deux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  de  $E$  et de  $F$ .  
Si  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -ev de dim  $n$  et  $p$ , isomorphisme d'ev entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  (des bases de  $E$  et  $F$  étant fixées).
- Écriture de  $y = u(x)$  sous forme matricielle :  $Y = AX$  si  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ ,  $X$  matrice colonne des coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}_E$  et  $Y$  matrice colonne des coordonnées de  $y$  dans  $\mathcal{B}_F$ .  
Matrice d'une composée d'applications linéaires.  
Lien entre matrice inversible et isomorphisme.

## QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

- Déterminer le terme général d'une suite réelle vérifiant  $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$  où  $a, b, c$  sont des nombres réels choisis par le colleur.
- Exo : on note  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de t.g.  $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$ . Déterminer le terme général de  $A^p$  pour tout entier naturel  $p$ .  
(On a introduit U matrice de t.g.  $u_{i,i} = 1$  et écrit  $A = U - I_n$ .)
- Donner, sans démonstration, la matrice produit de deux matrices élémentaires  $E_{i,j}E_{k,\ell}$  lorsque  $E_{i,j} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $E_{k,\ell} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ .  
Propriété de la trace : si  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ , on a  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  (démon).  
En déduire que si  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$
- Les ensembles  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$  des matrices symétriques et anti-symétriques sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  supplémentaires.  
Préciser une base et la dimension de  $\mathcal{S}_n$ .
- Base et dimension des sevs suivants  $H_n = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \text{tr}(A) = 0\}$ ,  $\Delta_n = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} = 0\}$
- Si  $f$  est un projecteur de  $E$  (avec  $\dim E = n$ ), il existe une base de  $E$  dans laquelle  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$   
et/ou si  $g$  est une symétrie vectorielle de  $E$ , il existe une base de  $E$  dans laquelle  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $x \in E$  et  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$  où  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  sont des bases de  $E$  et de  $F$ . Démontrer que les coordonnées du vecteur  $u(x)$  dans la base  $\mathcal{B}_F$  sont données par la colonne  $AX$  où  $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(x)$ .
- Soit  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$ . On appelle  $\varphi$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .  
Expliquer ce que cela veut dire.  
CNS sur  $r$  pour que  $\varphi$  soit injective, CNS sur  $r$  pour que  $\varphi$  soit surjective.
- Exo : Soit  $u, v$  deux réels et  $Q$  le polynôme défini par  $Q = X^2 + uX + v$ . On considère  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $\Phi(P) = P'Q - PQ'$ . Montrer que  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  et donner la matrice  $A$  de  $\Phi$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Utiliser la matrice pour déterminer  $\ker \varphi$ .

**PRÉVISIONS** : Changements de bases, matrices équivalentes, semblables. Systèmes linéaires.