Programme semaine 23 - semaine du 7 avril

Le cours doit être parfaitement su.

Matrices

programme de la semaine dernière et en plus les changements de bases, et les systèmes linéaires. NB : les éléments propres ne figurent pas au programme de 1ère année, les définir si besoin.

Matrices, applications linéaires, changements de bases

1. Matrices de passages. Toute matrice de passage est inversible. Formule de changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur.
2. Formule de changement de base pour les matrices d'applications linéaires. Cas particulier des endomorphismes.
3. Matrices équivalentes. Définition. Relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathrm{K})$. Toute matrice de rang r est équivalente à J_r. Conséquence : deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. Propriété : $\mathrm{rg}\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{rg}\ \mathrm{A}$. Conséquence : le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses lignes.
4. Matrices semblables. La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. Méthode pour démontrer que deux matrices données sont semblables en lien avec la formule de changement de bases.

   Trace d'un endomorphisme.

   En exercice : montrer qu'une matrice est semblable à une matrice simple donnée, (diagonale, triangulaire, écrite par blocs...)

   N.B. Les éléments propres ne sont pas au programme en 1ère année, on a vu les définitions au cours des exercices mais les redéfinir si besoin). Applications : calculs de A^n, résolution d'équations matricielles, systèmes de suites récurrentes ou système différentiel (sera vue cette semaine en exercices en classe, à partir du 8 avril mais vous pouvez déjà le faire en colle)
5. Méthode du pivot de Gauss. Matrices d'opérations élémentaires : transposition, dilatation et transvection. Générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et décompte en $\mathrm{O}(n^3)$ opérations pour inverser une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$. Méthodes d'inversion d'une matrice (par résolution d'un système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$, ou utilisation des matrices d'opérations élémentaires à gauche sur les matrices A et I_n simultanément)
6. Écriture d'une matrice par blocs, interprétation avec un sev stable, produit par blocs.

Systèmes linéaires

1. Définition. Interprétation matricielle. Vocabulaire : second membre, inconnues, solutions, matrice d'un système linéaire, rang, système homogène, système compatible. Systèmes de Cramer.
2. Systèmes équivalents. Opérations élémentaires sur les lignes. Méthode du pivot de Gauss. La résolution d'un système de Cramer d'ordre n nécessite $\mathrm{O}(n^3)$ multiplications scalaires.
3. Structure de l'ensemble des solutions du système homogène : sev de K^n de dimension $n-r$ où n est le nombre d'inconnues et r le rang du système. Structure affine de l'ensemble des solutions du système non homogène. Condition de compatibilité d'un système linéaire à l'aide du rang de $(\mathrm{C}_1, ..., \mathrm{C}_n, b)$ où C_j désigne le j ème vecteur colonne de la matrice du système et b le second membre du système.
4. Si $\dim \mathrm{E} = n$, tout sev vectoriel strict F de E de dimension p (avec $p < n$) est l'intersection de $n - p$ hyperplans de E.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Formule de changement de bases pour un vecteur et pour une application linéaire (ou un endomorphisme).
2. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ vérifie $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, alors A est semblable à $\mathrm{D} = \mathrm{D}iag(1, 1, ..., 1, 0, \ldots, 0)$ où le nombre de 1 correspond à $r = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$. Justifiez aussi que, dans cet exemple, $r = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.
3. *Exo* Soit p la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + 2y - z = 0$.
   Déterminer la matrice de l'endomorphisme p relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Une matrice de rang r est équivalente à J_r (démonstration).
5. *Exo* : Dans cet exercice on n'exigera pas forcément tous les calculs mais au moins la description de la méthode.
   Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Lien entre A^n et B^n (sans demander d'expliciter les coefficients de A^n).
6. *Système linéaire* : si la matrice du système linéaire est $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m,\ell}(\mathrm{K})$ de rang r, donner (en expliquant) la dimension du sous-espace vectoriel des solutions du système homogène. Expliquer la structure de l'ensemble des solutions du système non homogène.

PRÉVISIONS : Dénombrement