Programme de colle semaine n°24 - 13 avril

Le cours doit être parfaitement su.

A) Matrices et algèbre linéaire

Tout exercice utilisant : **représentation matricielle d'une application linéaire, changement de bases, systèmes linéaires.**

B) Ensembles finis et dénombrement

1) Résultats sur les applications entre ensembles finis

si E est un ensemble fini et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ alors $f(\mathrm{E})$ est fini et $|f(\mathrm{E})| \leq |\mathrm{E}|$ avec égalité ssi f est injective. Si f est injective alors $|\mathrm{E}| \leq |\mathrm{F}|$; si f est surjective, $|\mathrm{E}| \leq |\mathrm{F}|$; si f est bijective alors $|\mathrm{E}| = |\mathrm{F}|$.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ avec E et F finis et de même cardinal, on a : (f injective $\iff f$ bijective $\iff f$ surjective).

2) Résultats de dénombrement

Cardinal de la réunion de deux ensembles finis (disjoints ou non).
Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis, nombre de p-uplet d'éléments de E.
Principe des bergers. Principe des tiroirs.

Nombre d'applications entre deux ensembles finis. Cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ si E fini. Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. Nombre de p-uplet sans répétition d'éléments de E (ou p-liste d'éléments deux à deux distincts de E ou encore p-arrangement d'éléments de E). Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis.
Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$. Expression de $\binom{n}{p}$ (démonstration combinatoire).
Propriétés des coefficients du binôme : symétrie, relation de Pascal et formule du binôme (démonstration combinatoire des propriétés).

Méthodes : construction d'une bijection avec un ensemble de cardinal connu, bijection non formelle autorisée avec description d'un "identifiant" et utilisation des mots clés du cours : p-uplet, ou p-uplet sans répétition (arrangement) ou permutation ou sous-ensemble à p éléments ; représentation par un arbre de sélection ; décomposition de l'ensemble en une partition d'ensembles dont les cardinaux sont connus ; utilisation du principe des bergers.

C) Exercices sur les développements limités

en prévision du cours "Séries", révision des DL. Vous pouvez poser n'importe quel exercice sur le sujet. Cela peut être juste un calcul d'équivalent, ou un calcul de limite.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours : **Pour tous au moins un D.L d'une fonction usuelle à écrire (par coeur) sans démonstration (note $\leq 10/20$ si DL non su)** + une Question de cours ou un Exo de révision :

1. Révision :*Systèmes linéaires* : si la matrice du système linéaire est $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m,\ell}(\mathrm{K})$ de rang r, donner (en expliquant) la dimension du sous-espace vectoriel des solutions du système homogène. Expliquer la structure (affine) de l'ensemble des solutions du système non homogène.
2. Exo de révision :
   (a) Montrer que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Expression de T^n pour $n \in \mathbb{N}$ et décrire la méthode donnant A^n (sans expliciter les coefficients)
   (c) Décrire la méthode permettant d'expliciter les suites u, v et w définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et la relation de récurrence :
   $$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = -2u_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$
3. Exo de révision : ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) Soit $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans K deux à deux distincts.
   (a) Montrer que pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{K}^n$, il existe un et un seul $\mathrm{P} \in \mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = \mathrm{P}(a_i)$

(b) On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, L_i l'unique polynôme de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Expliciter L_i, justifier que la famille $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et exprimer P polynôme quelconque de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ dans cette base.

(c) Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{L}$ à la base canonique de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

(d) Déterminer tous les polynômes de $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = \mathrm{P}(a_i)$ (*équation linéaire*)

4. Révision d'exo : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ une matrice vérifiant $\mathrm{A}^n = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable aux matrices : $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N}^{\intercal}$

5. Cardinal de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ si E et F sont des ensembles finis. Cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ si E ensemble fini. (Les démonstrations sont exigées)

6. Nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments (démo combinatoire).

7. Exo (formule de Van Der Monde) pour $n, p \in \mathbb{N}$, démontrer $\displaystyle\binom{n+m}{p} = \sum_{i+j=p} \binom{n}{i}\binom{m}{j}$

PRÉVISIONS : Séries numériques puis Proba.

N.B. : Les colles du vendredi 8 mai (semaine 25) devront être déplacées. Il n'y aura pas de colle de math en MPSI2 la semaine 26 de l'Ascension : du 11 au 16 mai.