

## Programme de colle semaine n°25 - semaine du 4 mai

Le cours doit être parfaitement su.

### Révision - DL

Tout exercice sur le sujet, y compris des calculs de limites

### Séries à termes réels ou complexes

La série de terme général  $u_n$  est notée  $\sum u_n$  et en cas de convergence sa somme est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . Somme partielle. Le terme général  $u_n$  d'une série convergente tend vers 0. Critère de divergence grossière. Le reste d'ordre  $n$  d'une série convergente tend vers 0. Opérations sur les séries.

Les séries de référence :

- les séries géométriques  $\sum q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$  et valeur de la somme ;
- série exponentielle  $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ . Application : développement en série de  $\operatorname{ch}(x)$ ,  $\operatorname{sh}(x)$ ,  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  pour tout  $x$  réel.
- Séries de Riemann :  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ . Encadrement des sommes partielles et équivalent de  $S_n$  dans les cas de divergence. Encadrement des restes et équivalent de  $R_n$  quand la série converge.

**Séries à termes positifs : Théorème de comparaison** si à partir d'un certain rang, on a  $0 \leq u_n \leq v_n$ , alors la convergence de  $\sum v_n$  implique la convergence de  $\sum u_n$  et la divergence de  $\sum u_n$  implique la divergence de  $\sum v_n$ .

Corollaire : si  $u_n \sim v_n$ , avec  $(v_n)_n$  de signe constant, alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

*Pas de résultat sur les sommations des relations de comparaison en 1ère année*

Révision : Comparaison série/intégrale

(Le critère de D'Alembert a été vu).

**Critère des séries alternées** et majoration des restes.

**Convergence absolue.** Toute série absolument convergente est convergente et dans ce cas :  $|\sum_{k=n}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_k|$ .

Si  $a_n \geq 0$  et  $u_n = O(a_n)$  alors la convergence de  $\sum a_n$  implique la convergence absolue de  $\sum u_n$

Exemples : si  $|q| < 1$ , la série  $\sum n^\alpha q^n$  converge absolument ( $n^\alpha q^n = o(\frac{1}{n^2})$ ); la série  $\sum \frac{\ln n}{n^2}$  converge ( $\frac{\ln n}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$ )

**Étude d'une suite** : la suite  $u$  a même nature que la série  $\sum (u_n - u_{n-1})$ . Exemples :  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$

L'équivalent de Stirling  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  a été démontré en exercice. *Les élèves doivent connaître cet équivalent.*

**N.B.** Je n'ai pas encore traité les fractions rationnelles ; les élèves ne sauront pas décomposer en éléments simples sans indication, sauf fraction rationnelle du type  $1/n(n+k)$ . Une question du type : "Calcul de la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ " doit, à ce stade de l'année, mentionner la forme de la D.E.S.

## QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Le terme général d'une série convergente tend vers 0 et le reste d'une série convergente tend vers 0.
2. Nature des séries géométriques et expression de la somme en cas de convergence.
3. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Énoncé et démonstration. (Version inégalité ou version équivalent)
4. Montrer que pour  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge et équivalent de la somme partielle.
5. Montrer que si  $\alpha > 1$ ,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge et équivalent du reste.
6. Critère des séries alternées. Énoncé et démonstration, avec majoration des restes.
7. *Exo* Pour quels  $\alpha > 0$ , y a-t-il convergence absolue de  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ ? Même question pour la convergence de la série.
8. Nature des séries suivantes :  $\sum \frac{n}{2^n}$ ,  $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ ,  $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$  et  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ ,  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
9. Critère de D'Alembert (énoncé et démonstration).
10. La suite  $(u_n)_n$  est de même nature que la série  $\sum (u_n - u_{n-1})$ .  
Application : la suite  $u_n = H_n - \ln n$  est convergente, on écrira  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ .

**Bonnes vacances à tous !**

**Pensez à décaler vos colles du vendredi 8 mai. RAPPEL : pas de colles la semaine du 11 mai..**

**PRÉVISIONS** : Reprise des colles le 18 mai. Probabilités sur un univers fini