

Programme de colle - semaine 27 (18 mai)

Le cours doit être parfaitement su.

A- Probabilités sur un univers fini

En MPSI le programme se limite aux expériences aléatoires pour lequel l'univers est fini. Le cours a été traité dans ce cadre mais vous pouvez poser des exercices avec un univers infini, sans soulever de difficulté, en admettant l'existence d'un espace probabilisé et à condition que l'exercice n'utilise que les propriétés d'une probabilité vues en 1ère année (pas de σ -additivité en MPSI, ni de limite monotone.)

1) Univers et événements.

Langage des probabilités : Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, conjonction ou disjonction d'événements, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

2) Probabilités sur un univers fini

Une probabilité sur Ω (fini) est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ tel que $P(\Omega) = 1$ et pour toutes parties A et B disjointes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Exemple : équiprobabilité sur Ω .

Propriétés : probabilité de l'événement contraire, probabilité d'une réunion de 2 événements (la formule du crible pour une union de $n \geq 3$ événements a été écrite mais n'est pas au programme), propriété de croissance.

3) Probabilités conditionnelles.

Définition : si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $P(A|B)$ ou $P_B(A)$ et définie par
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \text{ Par convention, si } P(B) = 0, P(A|B)P(B) = 0$$

L'application P_B est une probabilité sur Ω .

Formule des probabilités composées. *Représentation avec arbre de probabilité, comme au lycée possible et à valoriser mais, dans un exercice, on exigera l'écriture de la formule.*

Formule des probabilités totales (associée à un système complet d'événements $(A_i)_{i=1..n}$:
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$
 (représentations : partition de Ω où on fait figurer la partie B de Ω ou arbre de probabilité). *On exigera l'expression explicite de la formule avec nom des événements formant le système complet d'événements (même si la représentation par des parties ou par un arbre est à valoriser).*

Formule de Bayes.

4) Événements indépendants. Couple d'événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants. Exemple d'événements deux à deux indépendants mais non mutuellement indépendants.

B - Variables aléatoires définies sur un univers fini (le début)

1) Loi

Définition d'une V.A. Notation pour les événements associés à une VA : $(X \in A)$, $(X = a)$, $(X \leq a)$ etc

Loi. Exemples : loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (et notation $1_A \sim \mathcal{B}(P(A))$), loi binomiale (situation : si X compte le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes où chaque succès arrive avec probabilité p alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$).

Loi d'une fonction d'une variable aléatoire $Y = f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

2) Indépendance

Indépendance mutuelle d'une famille de n variables aléatoires. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$ pour 2 VA indépendantes.

Lemme des coalitions.

Théorème de stabilité des lois binomiales : si $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ et si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Application : loi de $X_1 + \dots + X_n$ si $(X_i)_i$ famille de VA indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$.

3) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe.

1. Définition, interprétation. Exemples de calcul d'espérance (lois usuelles en particulier).
2. Théorème de transfert : $E(\varphi(X))$ (X pouvant être un couple ou un uplet de VA réelles ou complexes).
Calcul de $E(X^2)$ pour une loi binomiale en passant par $E(X(X - 1))$.
3. Propriétés de l'espérance :
 - Linéarité de l'espérance
 - si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. Corollaire : si (X_i) famille mutuellement indépendante, alors $E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n)$.
4. Inégalités sur l'espérance pour les VAR :
 - (1) si X VA à valeur positive $E(X) \geq 0$, (croissance) $X \leq Y \implies E(X) \leq E(Y)$,
 - (2) (inégalité triangulaire) $|E(X)| \leq E(|X|)$.
 - (3) (inégalité de Cauchy-Schwarz) $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$. (démonstration avec les sommes finies, car j'avais admis l'inégalité Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n en cours d'année, on verra la démonstration dans le cadre du bilinéaire (prochain chapitre).
 - (4) Inégalité de Markov : si X V.A. positive $\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

N.B. La notion de variance n'a pas été abordée cette semaine. Reportée à la semaine prochaine.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé (fini) et B un événement tel que $P(B) > 0$. Montrer que l'application P_B appelée, probabilité conditionnelle sachant B , est une probabilité sur Ω .
2. Formule des probabilités composées (énoncé et démonstration).
3. Formule des probabilités totales (énoncé et démonstration).
4. *Exercice* On considère n menteurs I_1, \dots, I_n . I_1 reçoit une information sous forme de OUI ou NON et la transmet à I_2 qui la transmet à I_3 ainsi de suite jusqu'à I_n qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et son contraire avec probabilité $q = 1 - p$ et les réponses des n personnes sont indépendantes. On note A_i l'événement « I_i transmet l'information initiale » et $p_i = P(A_i)$.
 - (1) Déterminer une relation de récurrence entre p_i et p_{i-1} (Indication : commencer par interpréter $P(A_i|A_{i-1})$).
 - (2) En déduire la probabilité que l'information soit fidèlement transmise et préciser $\lim_n p_n$
5. *Exercice.* Un pion évolue sur 3 cases A, B, C entre les instants 0 et $N \geq 3$. À l'instant $t = 0$, il est en A. Puis, il se déplace de façon aléatoire sur les cases en respectant les règles suivantes (pour $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$) :
 - s'il est en A ou B au temps $t = n$, il va au temps $t = n + 1$ sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité.
 - s'il est en C au temps $t = n$, il y reste.

On note (pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$) A_n (resp. B_n et C_n) l'événement "À l'instant $t = n$, le pion est sur la case A (resp. sur les cases B et C)". On pose enfin $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

- a) Trouver une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$.
- b) Calculer c_N puis trouver $\lim_{N \rightarrow +\infty} c_N$.

6. *Exercice* On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, \dots, n$ tous les choix étant équiprobables. Soit p un entier naturel non nul et $\leq n$. Soit A_p l'événement «le nombre choisi est divisible par p »
- (1) Calculer $P(A_p)$ lorsque p divise n .
 - (2) Montrer que si p_1, p_2, \dots, p_k sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_k}$ sont indépendants.
 - (3) On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction ϕ définie sur \mathbb{N} dont la valeur $\phi(n)$ est égale au nombre d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ premiers avec n . Montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

7. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n + m, p)$. Application à la loi de la somme de n V.A. mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
8. Calcul de l'espérance des lois usuelles (loi certaine, uniforme, Bernoulli et binomiale)
9. Inégalité de Markov (énoncé et démonstration)
10. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
 - (1) a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, E(e^{tS_n}) = (\text{ch } t)^n$.
 - b. Montrer que $\forall t, \text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$ Indication : comparer les développements en séries.
 - (2) Soit $a > 0$.
 - a. Montrer que $P(S_n \geq a) \leq e^{-ta} E(e^{tS_n})$ pour tout $t > 0$.
 - b. En déduire $P(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$
 - (3) Soit $\varepsilon > 0$, montrer $P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$.

PRÉVISIONS :

- Proba : Variances et inégalités de Bienaymé Chebychev, Loi des grands nombres
- Espaces euclidiens
- Déterminant
- Intégration
- Fraction rationnelles et décomposition en éléments simples
- Fonctions de plusieurs variables
- Familles sommables