Programme de colle semaine 28 - semaine du 26 mai

Le cours doit être parfaitement su.

Variables aléatoires sur univers fini

Voir programme de la semaine précédente avec en plus les notions suivantes :

— Variance, covariance.

— Inégalité de Biennaymé-Chebychev. Loi faible des grands nombres

— Vocabulaire sur les couples de VA (lois conditionnelles)

— Fonction génératrice pour une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$. Applications aux calculs des moments, ou à la détermination de lois, en particulier lors de somme de VA indépendantes.

Questions de cours :

1. Inégalité de Markov (énoncé et démonstration).
2. Définition de la covariance. Propriété. Utilisation de la bilinéarité de la covariance pour établir la variance d'une somme de n variables aléatoires.

   Application : calcul de la variance d'une VA de loi binomiale en utilisant une famille de VA de Bernoulli indépendantes.
3. Inégalité de Bienaymé-Chebychev (énoncé et démo).

   Puis application à la loi faible des grands nombres (énoncé et démonstration).
4. Si X VA à valeurs dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$, calcul de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$ à l'aide de sa fonction génératrice. Application à la loi $\mathcal{B}(n, p)$ (retrouver espérance et variance).
5. Fonction génératrice de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ lorsque X et Y indépendantes (à valeurs dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$). Application : théorème de stabilité des lois binomiales indépendantes.
6. *Exo* Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$ où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, établir que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq k)$
7. *Exo* On choisit une permutation σ au hasard de $[\![1, n]\!]$. On appelle $\mathrm{X}(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ ; X est donc une VA définie sur $\mathcal{S}_n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on introduit les v.a. X_i valant 1 si i est un point fixe de la permutation, et 0 sinon.

   (1) Déterminer la loi des v.a. X_i. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1$.

   (2) Vérifier ensuite $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 1$.

   (3) a) On choisit une permutation quelconque de $[\![1, n]\!]$, justifier (sans calculer la loi de X) que la probabilité que le nombre de points fixes soit inférieur ou égal à 2 vaut au moins $3/4$.[a]
   b) Que dire de la probabilité de l'événement "la permutation choisie a un maximum de 3 points fixes." ?

PRÉVISIONS : Espaces euclidiens puis Déterminant

a. $\mathrm{P}(|\mathrm{X}-1| \leq 1) = 1 - \mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})| > 1) = 1 - \mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})| \geq 2)$, puis inégalité de Bienaymé-Chebychev.