

Programme de colle semaine 29 - semaine du 1er juin

Le cours doit être parfaitement su.

Espaces euclidiens

Le cours n'est pas fini (théorème de la projection orthogonale reporté à la semaine prochaine) mais vous pouvez déjà poser des exercices sur les notions suivantes.

A) Produit scalaire

- Définition d'un produit scalaire, exemples : produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n , produit scalaire intégral dans $\mathcal{C}([a, b])$, quelques produits scalaires dans $\mathbb{R}_n[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$.
Définition d'une norme sur un ev.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Norme issue d'un produit scalaire (norme euclidienne). Identité du parallélogramme, formules de polarisation.
- Notion d'orthogonalité, d'angle non orienté de vecteurs. Orthogonal d'une partie, propriété : A^\perp est un sev de E, $(\text{Vect}(\mathcal{F}))^\perp = \mathcal{F}^\perp$. Si a est non nul, $(\text{Vect}(a))^\perp$ est un hyperplan.
Famille de vecteurs orthogonale, orthonormale. Liberté de telles familles. Relation de Pythagore.

B) Espaces euclidiens

- Définition d'un espace euclidien. Existence de bases orthonormales (B.O.N.) dans tout espace euclidien. Toute famille orthonormale peut se compléter en une B.O.N. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale et du produit scalaire de deux vecteurs. Expression matricielle $X^T Y$.
- Les matrices de passage entre deux B.O.N. sont les matrices vérifiant $M^T M = I_n$ (matrices orthogonales d'ordre n). Propriété : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. *N.B. Le groupe des automorphismes orthogonaux ou isométries vectorielles de E et leurs propriétés ne sont plus au programme de 1ère année.*
- Supplémentaire orthogonal. Si F est un sev de dimension finie d'un ev E préhilbertien, existence et unicité d'un supplémentaire de F orthogonal à F, on le note F^\perp . Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est une B.O.N de F, la projection orthogonale de $x \in E$ sur F est $p_F(x) = \sum_{i=1}^m \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$.
Lorsque E est euclidien, $\dim F^\perp$ et égalité $(F^\perp)^\perp = F$.
- Projecteurs orthogonaux. Caractérisation d'un projecteur orthogonal par $y = p_F(x) \iff y \in F$ et $(x - y) \in F^\perp$. Expression d'une projection orthogonale sur F quand une B.O.N. de F est connue. Inégalité de Bessel.

Questions de cours :

- Démontrer que $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et/ou que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz. (On indiquera à l'étudiant de considérer la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(t) = \langle x + ty | x + ty \rangle$). Étude des cas d'égalité.
- Si \langle, \rangle produit scalaire sur E, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E.

- Savoir démontrer qu'une application est une norme est euclidienne (exemple du cours : on note pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(u) = \sqrt{x^2 + 2xy + 4y^2}$. Montrer que N est bien définie sur $E = \mathbb{R}^2$ et que N est une norme euclidienne sur E ou tout autre exemple proposé par le colleur.
- 4. Si \langle, \rangle produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ norme euclidienne associée, u, v, x_i ($i = 1..n$) des vecteurs de E
 - développer $\|u + v\|^2$, $\|u - v\|^2$ et retrouver les formules de polarisation et l'égalité du parallélogramme.
 - Développer (par bilinéarité) $\|x_1 + \dots + x_n\|^2$; en déduire la relation de Pythagore lorsque $(x_i)_{i \in [1, n]}$ est une famille orthogonale.
 - Toute famille orthogonale de E ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre de E .
- 5. — Si A est une partie de E , A^\perp est un sev de E .
 - $E^\perp = \{0\}$. Puis si deux vecteurs x, y de E vérifient, $\forall z \in E, \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$, alors $x = y$
 - *Exo* : déterminer F^\perp si $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y = 0, x + z + t = 0\}$ où \mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne classique.
 - Si $a \neq 0$. Justifier que $H = \{a\}^\perp$ est un hyperplan de E .
- 6. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1, n]}$ est une **B.O.N.**
 - a) expression du produit scalaire $\langle x, y \rangle$ et de $\|x\|^2$ à l'aide des colonnes X et Y des coordonnées de x et de y dans la B.O.N. \mathcal{B} .
 - b) Les coordonnées dans \mathcal{B} d'un vecteur x sont les $(\langle x, e_i \rangle)_i$;
 - c) *Application* : Si \mathcal{B} est une B.O.N. d'un ev euclidien de dim n et \mathcal{B}' une famille de n vecteurs de E , si on note $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in M_n(\mathbb{R})$, on a alors

$$\mathcal{B}' \text{ est une B.O.N. de } E \iff P^T P = I_n$$

- 7. Si F est un sev de dimension finie d'un ev E préhilbertien, montrer que $E = F \oplus F^\perp$. Lorsque $\dim F \geq 1$, on a muni F d'une B.O.N. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$.
Expression de la projection orthogonale sur F à l'aide d'une B.O.N. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ de F .
- 8. Si p est une projection orthogonale, $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$
- 9. *Exo* $M_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.
 - (1) Montrer que \mathcal{A}_n est le supplémentaire orthogonal de \mathcal{S}_n .
 - (2) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ Déterminer le projeté orthogonal de A sur \mathcal{S}_2 (on pourra donner 2 méthodes : avec ou sans utiliser la question précédente).
- 10. On note $\ell_2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge.
 - (1) Montrer que si $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont dans $\ell_2(\mathbb{N})$ alors $\sum u_n v_n$ converge.
 - (2) Montrer que $\ell_2(\mathbb{N})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 - (3) On pose pour $(u, v) \in \ell_2(\mathbb{N})^2$, $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\ell_2(\mathbb{N})$.
 - (4) On note F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de $\ell_2(\mathbb{N})$. Déterminer F^\perp . Les sous-espaces F et F^\perp sont-ils supplémentaires? Comparer $(F^\perp)^\perp$ et F .

PRÉVISIONS : fin des espaces euclidiens (théorème de la projection orthogonale) puis Déterminant