Programme de colle semaine 30 - semaine du 10 juin

Le cours doit être parfaitement su.

Espaces euclidiens

Même programme que la semaine précédente, avec **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**, **le théorème de la projection orthogonale** : la distance d'un vecteur x à un sev F de dimension finie est atteinte (c'est un $\min$) en un unique point : le projeté orthogonal de x sur F. Et la notion de symétrie orthogonale. **Tout exercice sur le chapitre**.

Groupe symétrique et Déterminants (le tout début)

Chapitre non fini, les élèves ne savent pas encore calculer les déterminants de matrices carrées donc ***aucun exercice sur le déterminant cette semaine****.*

1. Groupe symétrique d'ordre n, transposition, cycles, signature. Groupe alterné.
2. Application n-linéaire, application n-linéaire alternée, Propriété d'anti-symétrie.
   Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n.
3. Définition du déterminant de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ de E $(\dim \mathrm{E} = n)$, notée $\det_{\mathcal{B}}$. Propriété : $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n linéaire alternée qui vaut 1 sur $\mathcal{B}$ et toute autre forme $n-$ linéaire alternée sur E lui est proportionnelle. Propriétés : changement de bases, caractérisation des bases parmi les familles de n vecteurs.
4. Déterminant d'une matrice carrée A. Expression en fonction des coefficients.
   Les méthodes de calcul de déterminant n'ont pas été vues faute de temps. Les déterminants seront au programme la semaine du 15 juin

Questions de cours :

1. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une **B.O.N.** Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur x sont les $(< x, e_i >)_i$; expression du produit scalaire $< x, y >$ à l'aide des colonnes X et Y des coordonnées de x et de y dans la B.O.N. $\mathcal{B}$.
   Application : Si $\mathcal{B}'$ est une famille de n vecteurs et $\mathrm{P} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a
   $$\mathcal{B}' \text{ est une B.O.N. de E} \Longleftrightarrow \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$$
2. Si $(\varepsilon_i)_{[\![1,m]\!]}$ est une B.O.N d'un sev F de dimension m d'un ev E préhilbertien, alors $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$ et la projection orthogonale de $x \in \mathrm{E}$ sur F est $p_{\mathrm{F}}(x) = \sum_{i=1}^{m} < x, \varepsilon_i > \varepsilon_i$.
3. Si p est une projection orthogonale, $\forall x \in \mathrm{E}, \|p(x)\| \leq \|x\|$ + inégalité de Bessel (lorsque p est la projection orthognale sur F de dimension finie muni d'une BON).
4. Théorème de la projection orthogonale : distance d'un vecteur à un sev de dimension finie (on exigera un dessin) avant la démonstration.
5. Si $a \neq 0$. Justifier que $\mathrm{H} = \{a\}^{\perp}$ est un hyperplan de E. Expression d'une projection orthogonale sur H, de la réflexion par rapport à H et de la distance d'un vecteur x à H.
6. *Exo* : orthonormaliser la famille de $\mathbb{R}^3$ suivante : $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. OU Tout autre exemple proposé par le colleur : par exemple orthonormaliser une famille libre de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni d'un produit scalaire explicite donné par le colleur.)

7. *Exo* : déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 \mathrm{d}t$.

   réponse : min atteint en $a = 6/5$, $b = -3/10$ et la valeur du min est 1/300.

8. Sur un exemple, savoir décomposer une permutation donnée en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transposition ; en déduire la signature.

9. $\mathcal{A}_n$ (ensemble des permutations paires de $[\![1, n]\!]$) est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ de cardinal $n!/2$ si $n \geq 2$.

10. Si g : $\mathrm{E}^2 \to \mathrm{F}$ est une application binéaire et alternée, alors g est anti symétrique, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, g(x, y) = -g(y, x)$$

11. Savoir les définitions suivantes du cours ou les formules (sans démonstration). Exemple :
    - expression de $\det(\mathrm{A})$ en fonction des $(a_{i,j})$
    - formule de changement de bases entre $\det_b(\mathcal{F})$ et $\det_{b'}(\mathcal{F})$ si b et b' sont deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E,

PRÉVISIONS : Déterminant (fin) Puis Intégration : construction de l'intégrale.