

Programme de colle semaine 31 - semaine du 15 juin

Le cours doit être parfaitement su.

Déterminants

1. Groupe symétrique, signature.
2. Application n -linéaire, application n -linéaire alternée, Propriété d'anti-symétrie.
Formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n .
3. Définition du déterminant de n vecteurs dans une base \mathcal{B} de E , notée $\det_{\mathcal{B}}$. Propriétés, caractérisation des bases, changement de bases.
4. Déterminant d'une matrice carrée A . Expression en fonction des coefficients.
Propriétés : caractérisation des matrices inversibles et si $A \in GL_n(K)$ $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
 $\det(A^T) = \det A$.
5. Déterminant d'un endomorphisme. Définition, exemples : déterminant de l'identité, d'une symétrie.
Propriétés : $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$, $\det(g \circ f) = \det g \det f$, application aux déterminants d'un produit de matrices carrées : $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. Caractérisation des automorphismes.
6. **Calcul de déterminant** : on se ramène au calcul de déterminant d'une matrice carrée
 - Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire par blocs.
 - Opérations sur les lignes et les colonnes.
 - Développement d'un déterminant par rapport à une ligne et une colonne.
7. Relation pour $A \in M_n(K)$: $A \operatorname{com}^T(A) = \operatorname{com}^T(A)A = (\det A)I_n$, application aux matrices inversibles. Exemple pour $n = 2$.
8. Formules de Cramer.
9. Résultats sur le rang : une matrice (rectangle) est de rang r si et seulement si [il existe au moins un déterminant extrait de A , d'ordre r , non nul et si tous les déterminants extraits de A d'ordre $r + 1$ sont nuls].
10. Compléments : $A \mapsto \det A$ fonction polynomiale en les n^2 variables ;
dérivation de $x \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1(x), \dots, u_n(x))$ où u_1, \dots, u_n sont n applications d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^n dérivables.

N.B. Le déterminant de VanderMonde a été traité en exercice et le résultat doit être connu des étudiants.

Uniforme continuité - Intégration sur un segment (début)

Uniforme continuité

Définition. Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues. Théorème de Heine. Approximation uniforme d'une fonction continue sur $[a, b]$ par des fonctions en escaliers.

Intégrale d'une fonction réelle en escalier

1. Définition
2. Propriétés des intégrales des fonctions en escaliers : relation de Chasles, linéarité, croissance

Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment, puis sur un intervalle quelconque.

Théorème : pour f à valeurs réelles et continue par morceaux, les quantités $I_-(f) = \sup \left\{ \int_{[a,b]} g / g \text{ en escalier et } g \leq f \right\}$ et $I_+(f) = \inf \left\{ \int_{[a,b]} h / h \text{ en escalier et } f \leq h \right\}$ existent et sont égales.

Définition : leur valeur commune est l'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_{[a,b]} f$.

N.B. Le cours n'est pas fini !

Questions de cours :

- Savoir les définitions suivantes du cours ou les formules (sans démonstration). Exemple :
 - expression de $\det(A)$ en fonction des $(a_{i,j})$
 - formule de changement de bases entre $\det_b(\mathcal{F})$ et $\det_{b'}(\mathcal{F})$ si b et b' sont deux bases de E et \mathcal{F} une famille de n vecteurs de E ,
 - Caractérisation des bases à l'aide du déterminant
 - formule de développement par rapport à une colonne (ou une ligne),
 - Pour $A, B \in M_n(K)$, $\lambda \in K$ $\det(AB) = \dots$ $\det(\lambda A) = \dots$
 - Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(g \circ f) = \dots$ $\det(\lambda f) = \dots$
 - formule reliant A , $\text{com}(A)$ et $\det(A)$ et formule sur A^{-1} lorsque $\det A \neq 0$. En particulier, expliciter les coefficients A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$.
 - Formules de Cramer et application à un système linéaire 2 équations 2 inconnues

$$2. \text{ Exo Calculer } D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Indication : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$

$$3. \text{ Exo : Calcul } D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (Relation entre } D_n, D_{n-1} \text{ et } D_{n-2} \text{ grâce à un développement par rapport à la première colonne).}$$

- Déterminant de VanderMonde. Enoncé et démonstration (on l'a démontré par récurrence avec le polynôme $P_n = V(x_0, \dots, x_n, X)$).
- Si $A \in M_n(K)$, l'application $\chi_A : t \in K \mapsto \det(tI_n - A)$ est un polynôme unitaire de degré n avec : $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$
- Exo (matrice compagnon) :
Soit (a_0, \dots, a_{n-1}) n scalaires et λ un scalaire. Déterminer l'expression de

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & 0 \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \lambda & -a_{n-2} \\ 0 & & & -1 & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

7. Donner la définition d'une fonction uniformément continue.

Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I .

Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ , vérifier ensuite $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ et en déduire que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

8. Théorème de Heine (énoncé et démonstration).

9. *Exo (Pour apprendre à utiliser l'uniforme continuité)*. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On note pour $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

(1) Montrer que si f est monotone, $(S_n)_n$ tend vers 0.

(2) Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, montrer que $(S_n)_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

(3) Si f est continue sur $[0, 1]$, montrer que $(S_n)_n$ tend vers 0.

C'est la dernière semaine de colle. Je vous remercie tous pour votre travail auprès des élèves !