

Programme de colle - semaine 32 - 22 juin

Le cours doit être parfaitement su. Pas de colle cette semaine, ça n'empêche qu'on fait comme si;-)

On travaille le cours, les exemples du cours puis on vérifie qu'on se sent à l'aise et autonome pour traiter les questions de cours suivantes :

Intégration sur un segment des fonctions cpm

Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples

QUESTIONS DE COURS :

1. Théorème sur les sommes de Riemann (méthode des rectangles). Démo à connaître soit dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ (ou lipschitzienne), avec la vitesse de convergence en $O\left(\frac{1}{n}\right)$, soit dans le cas continue sur $[a, b]$.
2. *Exo* : Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a; b]$. On note pour $n \in \mathbb{N}$: $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$
 - (a) Si f est de classe \mathcal{C}^1 , montrer que $I_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (grâce à une IPP).
 - (b) Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, montrer qu'on a encore $\lim I_n = 0$.
On a vérifié que le résultat est vrai pour f constante, puis en escalier, puis utilisé l'approximation uniforme de f par les fonctions en escaliers.
3. Si on note $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ où f est continue par morceaux sur l'intervalle I et $a \in I$, alors :
 - F est continue sur I (lipschitzienne sur tout segment inclus dans I).
 - Si f est continue en $x_0 \in I$, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$
4. Dérivabilité et dérivée d'une fonction du type $\varphi : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} u(t) dt$ si a et b sont dérivables sur l'intervalle I et à valeurs dans l'intervalle J et si u est continue sur J .
5. *Exo* : $H(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$, $G(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
 - (a) Domaine de définition de H . Montrer que H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner l'expression de $H'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) Domaine de définition de G . Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ (et sur $] - \infty, 0[$). Expression de $G'(x)$ pour $x > 0$ (et $x < 0$).
 - (c) Justifier que G se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
6. — Écrire la formule de Taylor avec reste intégral (Théorème du cours à énoncer).
— établir :

$$\forall x \geq 0, \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

— Écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x pour $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre n et \sin à l'ordre $2n+2$.

7. Décomposer en éléments simples la fraction $F = \frac{X^2 + 2}{X^2(X^2 + 1)}$ (dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$) ne pas oublier d'utiliser des arguments de symétries, limites etc
8. Déterminer le développement en éléments simples de P'/P lorsque P est un polynôme non nul scindé
Application DES de $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$
9. Si $F = \frac{A}{B}$ fraction irréductible ayant a comme pôle simple (respectivement pôle d'ordre de multiplicité m) retrouver le coefficient devant $1/(X - a)$ si pôle simple (resp. devant $1/(X - a)^m$ si pôle d'ordre m) en utilisant A et $B'(a)$ (resp. $B^{(m)}(a)$)

Application : décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F = \frac{1}{X^n - 1}$