

Programme de colle - semaine 1 - 21 septembre

N.B. aux colleurs : organisation d'une colle et notation

Organisation : La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle.

Le cours doit être parfaitement su. Puis exercice(s) au choix du colleur.

Notation : La question de cours (QC) sera notée sur 8 et la partie Exercice(s) sur 12, pour une note globale sur 20.

Le découpage doit apparaître sur le compte rendu de colle pour un meilleur suivi des élèves.

L'élève devrait en principe être autonome sur la QC. Si un point n'est pas compris, ce n'est pas grave de passer du temps à réexpliquer, surtout en début d'année. Les élèves ne doivent pas apprendre par coeur sans comprendre par peur de la mauvaise note. La colle n'est pas à ce stade de l'année un oral blanc, elle doit être un temps utile aux élèves pour pratiquer les notions vues en cours, mieux assimiler les méthodes et les raisonnements, et les rendre plus autonome.

Lors des exercices, demandez systématiquement si l'élève a déjà fait en classe l'exercice proposé, puis libre à vous d'en changer ou non si c'est le cas.

Lors de la colle on encouragera les prises d'initiative, les références précises au cours, la rigueur dans les calculs et les raisonnements et la clarté de l'exposition (dernier point difficile en début d'année). On encouragera aussi l'élève à proposer un procédé de contrôle sur ses réponses numériques.

Programme semaine 1

Calcul algébrique

notation $\sum$ et changement d'indices, télescopage, sommes géométriques, factorisation $a^n - b^n$, coefficient du binôme, formule du binôme de Newton, sommes doubles y compris triangulaires.

Trigonométrie

Formulaire de trigonométrie, avec linéarisation et formule de transformation $\cos p + \cos q$, $\sin p + \sin q$ (ces dernières sont à savoir retrouver rapidement à l'aide des formules d'addition)

Résolution d'équations $\cos(x) = \cos \theta$ ou avec sinus.

Réduction de $a \cos \theta + b \sin \theta$, et interprétation géométrique. Application à la résolution d'équation $a \cos x + b \sin x = c$ d'inconnue x réel.

Fonction tangente, propriétés, dérivée. Formule d'addition $\tan(a+b)$, $\tan(2a)$. Expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$ (à connaître, et à savoir démontrer)

Nombres complexes

Construction des nombres complexes (non exigible). Conjugaison, module, arguments ;

Inégalité triangulaire ;

Applications à la trigo : technique de l'angle moitié, calcul de $\sum_{0 \leq k \leq n} \cos(kx)$. Linéarisation. Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynômes en $\cos \theta$ et/ou $\sin \theta$

Équations polynomiales de degré 2 Racine carrée d'un nombre complexe, résolution d'un trinôme à coefficients complexes.

N.B. Le chapitre Nombres Complexes n'est pas encore fini. Reporté à la semaine prochaine : relation coefficients racines, racines n ième, exponentielle complexe et géométrie : expression complexe des similitudes directes.

Éléments de logique

Proposition Logique. Négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence.

N.B. on n'a pas eu le temps cette semaine de travailler sur les quantificateurs, ni sur les ensembles ou les méthodes de démonstration.

QUESTIONS DE COURS :

1. Trigo (Questions indépendantes)

- (1) Résoudre l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$
- (2) retrouver les expressions de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$ lorsque $\theta \in]-\pi, \pi[$

2. Calcul (au choix du colleur un ou plusieurs des calculs suivants). Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Calcul de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ (en simplifiant pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $k \binom{n}{k}$),
- (2) Exprimer le produit $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factorielle et/ou de puissance de 2
- (3) Calcul de $\sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \frac{(-1)^k}{2^{k+p}}$

- (4) Expression pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ de $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$

3. *Exo pour apprendre à utiliser la conjugaison*

Déterminer les complexes z non nuls pour lesquels $z + \frac{1}{z}$ est réel.

4. Inégalité triangulaire (pour 2 complexes) avec cas d'égalité (*énoncé et démo*).

5. Démonstration du corollaire : pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\left||z| - |z'|\right| \leq |z - z'|$.

6. Calcul pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$

7. Linéarisation : linéarisation de $\cos^{2p}(\theta)$ ou de $\cos^{2p+1}(\theta)$ ou de $\sin^{2p}(\theta)$ ou de $\sin^{2p+1}(\theta)$ (avec $p \in \mathbb{N}$) au choix du colleur et/ou le faire sur un exemple tel que $\cos^3(\theta)$ ou $\sin^3(\theta) \cos^2(\theta)$

8. Expliciter $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos \theta$ et $\sin \theta$

9. a) Déterminer les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$, puis les racines carrées de $3 + 4i$.

b) Vérifier que l'étudiant sait mettre un trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) sous forme canonique.

c) Résolution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ et/ou de $z^2 + 2z + \frac{7}{4} + i = 0$ ou d'une équation de degré 2 choisie par le colleur.

10. Soit P, Q des assertions logiques. Sans démonstration :

- donner le contraire de l'assertion (P et Q),
- donner le contraire de l'assertion ($P \implies Q$),
- donner une assertion équivalente à ($P \implies Q$)
- donner une assertion équivalente à (P ou Q).

Cette dernière QC complètera une QC de calcul

PRÉVISIONS : Complexes (fin) : Racines n ième de l'unité, exponentielle complexe, applications à la géométrie et description des similitudes directes.

Logique : utilisation des quantificateurs, méthodes de démonstration, ensembles.