

Programme de colle (semaine 2) - 28 septembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

Nombres complexes

Programme de la semaine dernière, en plus :

- **Relations coefficients-racines** (pour un polynôme de degré 2) .
- **Racines n -ièmes d'un nombre complexe.** Groupe $\mathcal{U}_n$ des racines n -ièmes de l'unité. Description, cardinal. Existence et calcul des racines n -ième d'un complexe non nul.

Éléments de logique

1. Proposition Logique. Négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence.
2. Quantificateurs $\forall$ et $\exists$
3. Méthodes de démonstration : récurrence, contraposée, raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse-synthèse.
4. Ensembles (appartenance, inclusion, opérations : intersection, réunion, complémentaire)

QUESTIONS DE COURS :

1. Si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$, écrire sous forme canonique le polynôme $P = aX^2 + bX + c$. En déduire l'expression des racines de P en fonction de δ une racine carrée du discriminant. *On fera attention à ne pas écrire de radical $\sqrt{\cdot}$ d'un complexe non réel*
2. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$. Démontrer que $\mathcal{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. Représentation dans le plan complexe.
3. Démontrer que $\mathcal{U}_n$ est de cardinal n et justifier que si $n \geq 2$, $\sum_{z \in \mathcal{U}_n} z = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -1$ ou $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ et/ou pour $a \in \mathbb{C}^*$, résolution de $z^n = a$. Représentation dans le plan complexe.
5. *Exo.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $P = (X+i)^n - (X-i)^n$.
 - (a) Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$ (*on résout l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, on fait attention à corriger les écritures $P(X) = 0 \dots$*).
 - (b) Combien P possède-t-il de racines distinctes ?
6. *Pour travailler sur les quantificateurs* Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Écrire la définition formelle de chacune des assertions suivantes puis écrire leur négation.
 - a) f est périodique ; b) f est majorée ; c) f est la fonction nulle ; d) f ne s'annule pas.
7. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (*pour travailler le raisonnement par l'absurde*).
8. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (*pour travailler le raisonnement par Analyse/Synthèse*).
9. Montrer que le complémentaire d'une réunion (quelconque) d'ensembles est l'intersection des complémentaires (ou résultat sur le complémentaire d'une intersection).

PRÉVISIONS : Complexes (fin) : exponentielle complexe, applications à la géométrie et description des similitudes directes.

Logique et ensembles : produits cartésiens.

Puis Applications (injection, surjection, bijection, notions d'image directe et réciproque).