

## Devoir à la Maison n°2

### Corrigé

### Problème 1 – Travelling contrarié

Le *travelling contrarié* est un effet de cinéma qui combine un **zoom optique** et un **déplacement réel** de la caméra sur un rail, dans la direction opposée (figure 1). Concrètement, la caméra avance vers le sujet tout en dézoomant, ou recule tout en zoomant, de sorte que la taille apparente du personnage reste constante tandis que l'arrière-plan semble se comprimer ou s'étirer.



FIGURE 1 – Illustration d'une situation de travelling contrarié. Source : [thedailyjaws.com](http://thedailyjaws.com)

Ce jeu entre mouvement physique et focale modifie la perspective et provoque une sensation de vertige. Inventé par Alfred Hitchcock dans *Sueurs froides* (1958), il a été repris par Steven Spielberg dans *Les Dents de la mer* (1975), lorsque le chef Brody, assis sur la plage, comprend soudain qu'un baigneur vient d'être attaqué par un requin. C'est cette scène particulière, appelée « *Get out of the water* », qui est étudiée dans ce problème (figure 2). Pendant tout le travelling, la mise au point est faite sur la jeune femme placée juste derrière le capitaine Brody.



FIGURE 2 – Illustration du travelling contrarié. Les photos sont extraites de la scène *Get out of the water*

Les photos du tournage de cette scène sont données sur la figure 3.

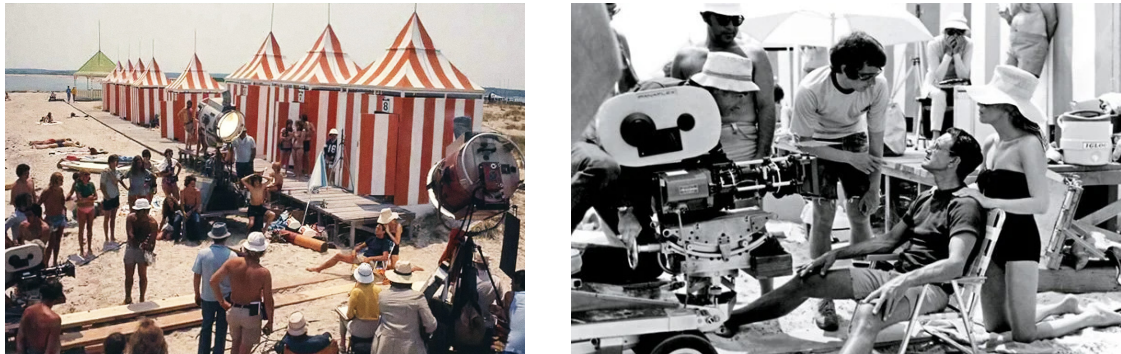


FIGURE 3 – Configuration du tournage de la scène *Get out of the water*. Source : [thedailyjaws.com](http://thedailyjaws.com)

#### RELATION UTILE

La relation de conjugaison de Descartes des lentilles minces permet de déterminer la position de l'image connaissant la position de l'objet. Les positions de l'objet et de l'image sont repérées par leurs distances algébriques au centre optique  $O$  de la lentille :  $\overline{OA}$  et  $\overline{OA'}$ .

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

## 1 Angle de champ

L'angle de champ (ou champ angulaire) est l'angle  $\alpha$  sous lequel la scène photographiée est capturée depuis le centre optique de l'objectif. Il correspond à l'angle formé, au niveau de l'objectif, par deux points de la scène situés aux limites de ce qui est visible sur la photographie. Les images de ces deux points se trouvent sur les bords du cliché (horizontalement, verticalement ou en diagonale; figure 4). Pour s'affranchir de la dépendance de l'angle de champ avec la distance de mise au point – dépendance relativement faible pour les objectifs de focale standard – il est usuellement défini pour une mise au point à l'infini.

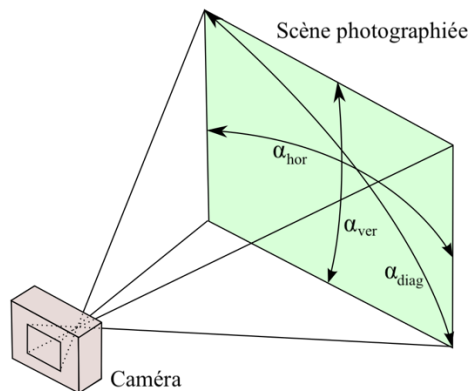


FIGURE 4 – Angle de champ. Source : [wikipedia.org](http://wikipedia.org)

Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de l'angle de champ au cours du travelling, responsable de l'effet de vertige mentionné en introduction. Pour cela, on modélise l'objectif de la caméra utilisée par Spielberg par l'association d'une simple lentille mince convergente  $\mathcal{L}$ , de distance focale  $f'$ , et d'un capteur photosensible, ici une pellicule  $\mathcal{P}$  de taille  $L$ . Le système optique étudié est schématisé sur la figure 5.

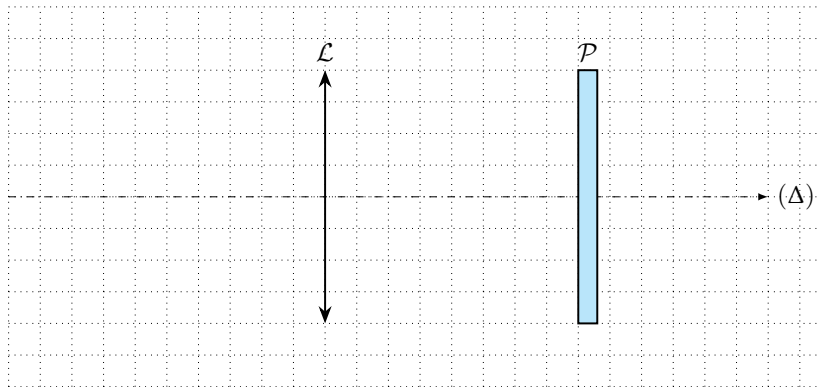


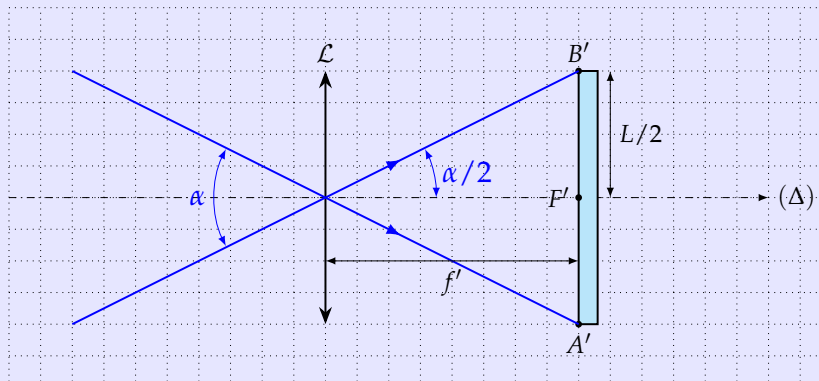
FIGURE 5 – Modèle simplifié de l'objectif de la caméra

**Q1.** Pour une mise au point à l'infini, préciser où se situe la pellicule  $\mathcal{P}$  par rapport à la lentille  $\mathcal{L}$ . Justifier.

La mise au point étant faite sur un objet à l'infini, la pellicule  $\mathcal{P}$  doit être placée dans le plan focal image de la lentille  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire à une distance  $f'$  de la lentille  $\mathcal{L}$ .

Pour déterminer l'angle de champ, on considère un objet transverse  $AB$  situé à l'infini dont les points images conjugués  $A'$  et  $B'$  se forment sur les bords de la pellicule.

**Q2.** Sur la figure 5, représenter l'angle de champ  $\alpha$ . Établir ensuite son expression en fonction de  $L$  et  $f'$ .



Géométriquement

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{L}{2f'}$$

On étudie les deux photos ci-dessous, extraites de la scène *Get out of the water*.



**Q3.** Comparer le champ angulaire de ces photos. En déduire celle qui a été prise avec l'objectif de plus grande focale.

On observe que la photo de gauche est prise avec un champ angulaire plus restreint que celle de droite. En notant  $\alpha_2$  le champ angulaire de la photo de gauche et  $\alpha_1$  le champ angulaire de la photo de droite :  $\alpha_2 < \alpha_1$ .

La fonction tangente étant strictement croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(\alpha_2/2) < \tan(\alpha_1/2) \quad \text{soit} \quad \frac{L}{2f'_2} < \frac{L}{2f'_1} \quad \Rightarrow \quad f'_2 > f'_1$$

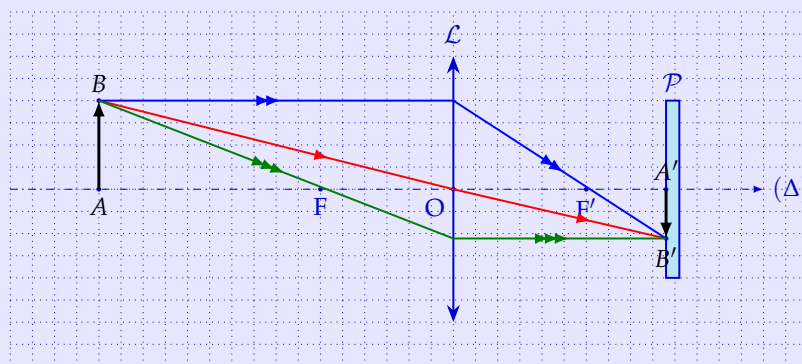
La photo de gauche a donc été prise avec une focale plus grande que la photo de droite.

## 2 Étude des images de la scène *Get out of the water*

On modélise dans cette partie de façon plus fine la situation du travelling contrarié : l'objectif de la caméra, toujours assimilé à une simple lentille convergente  $\mathcal{L}$  de focale  $f'$ , est maintenant **mobile**. On rappelle que, par définition du travelling contrarié, la taille apparente du personnage sur lequel la mise au point est faite ne change pas : le grandissement  $\gamma$  est donc constant.

**Q4.** Sur un schéma, représenter l'objectif  $\mathcal{L}$  de la caméra, le personnage sur lequel la mise au point est faite, qu'on assimilera à un objet transverse  $AB$ , la pellicule  $\mathcal{P}$  ainsi que l'image  $A'B'$  qui s'y forme. Le schéma doit représenter la situation de façon réaliste.

On représente la situation sur le schéma ci-dessous :



L'image se forme sur la pellicule  $\mathcal{P}$  ; elle est réelle, réduite et renversée.

**Q5.** On note  $d$  la distance entre l'objet sur lequel la mise au point est faite et la lentille  $\mathcal{L}$ . Exploiter les relations de Descartes pour exprimer la focale  $f'$  en fonction de la distance  $d$  et du grandissement transversal  $\gamma$  uniquement.

D'après la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On multiplie par  $\overline{OA}$  pour faire apparaître le grandissement  $\gamma$  :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} - 1 = \frac{\overline{OA}}{f'} \quad \text{Or} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{\overline{OA}}{f'}$$

Avec  $d = -\overline{OA} > 0$ , on obtient :

$$\frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{-d}{f'} \Rightarrow \frac{-d}{f'} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{d\gamma}{\gamma-1}}$$

**Q6.** En exploitant la photo ci-dessous et en détaillant votre démarche, estimer la valeur du grandissement transversal  $\gamma$  au cours du travelling.

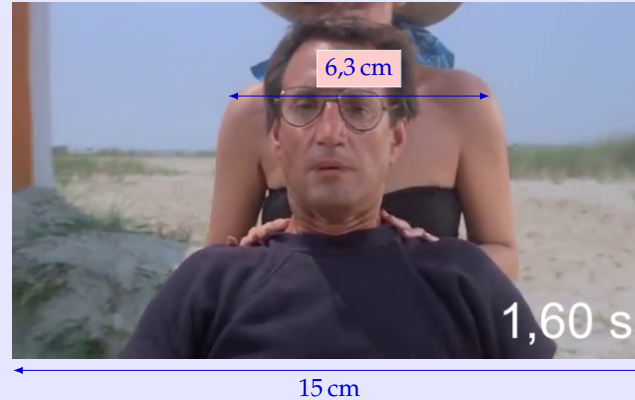


#### DONNÉES UTILES

- Dimension du négatif sur la pellicule utilisée par Spielberg :  $32,5 \text{ mm} \times 18,6 \text{ mm}$ .
- Pendant tout le travelling, la mise au point est faite sur la jeune femme placée juste derrière le capitaine Brody.
- Largeur moyenne des épaules d'une femme adulte :  $D = 35 \text{ cm}$ .



On commence par estimer la taille  $x$  de l'image des épaules de la jeune femme (sur laquelle la mise au point est faite) sur la pellicule. On utilise la proportionnalité entre la taille de la pellicule et les mesures sur la photo.



On obtient

$$x = \frac{6,3 \text{ cm} \times 32,5 \text{ mm}}{15 \text{ cm}} = 14 \text{ mm}$$

Ainsi, le grandissement  $\gamma$  a pour valeur

$$\gamma = -\frac{x}{D} = -\frac{13,65 \text{ mm}}{35 \text{ cm}} = \boxed{-3,9 \times 10^{-2}}$$

On attend la valeur de  $\gamma$  avec un ou deux chiffres significatifs.

En observant les photos du tournage (figure 3), on peut estimer les distances minimale et maximale  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$  entre l'objectif de la caméra et le plan de mise au point au cours du travelling de la scène *Get out of the water* :

$$d_{\min} \approx 1 \text{ m} \quad \text{et} \quad d_{\max} \approx 6 \text{ m}$$

**Q7.** En déduire une estimation des focales minimale et maximale  $f'_{\min}$  et  $f'_{\max}$  de l'objectif de la caméra utilisée lors de cette scène.

D'après la question 5

$$\boxed{f'_{\min} = \frac{d_{\min} \gamma}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_{\max} = \frac{d_{\max} \gamma}{\gamma - 1}}.$$

Les applications numériques donnent, en ne gardant qu'un seul chiffre significatif

$$\boxed{f'_{\min} = 4 \text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_{\max} = 0,2 \text{ m}}.$$

C'est-à-dire environ 40 mm et 200 mm (cohérent avec l'objectif réellement utilisé pour tourner la scène!).

On attend les valeurs des focales  $f'_{\min}$  et  $f'_{\max}$  avec un seul chiffre significatif.

### 3 Principe de fonctionnement d'un objectif à focale variable

La nécessité de faire varier la focale au cours du travelling a été mise en évidence. Il faut donc désormais affiner la modélisation de l'objectif de la caméra en étudiant le principe de fonctionnement d'un objectif à focale variable.

Les objectifs utilisés en prise de vue cinématographique sont des systèmes optiques très sophistiqués, constitués d'une vingtaine de lentilles. Dans cette partie, on modélise l'objectif de la caméra utilisée par Spielberg par un simple doublet de deux lentilles minces :

- celle du côté objet, appelée « lentille frontale », est convergente de distance focale  $f'_1 = 100 \text{ mm}$  et de centre  $O_1$ . Elle est fixe par rapport à la pellicule;
- celle du côté image, appelée « lentille arrière », est divergente de distance focale  $f'_2 = -50 \text{ mm}$  et de centre  $O_2$ . Elle est mobile par rapport à la pellicule.

Le système optique étudié est schématisé sur la figure 6 avec  $e = \overline{O_1O_2} = 200 \text{ mm}$ .

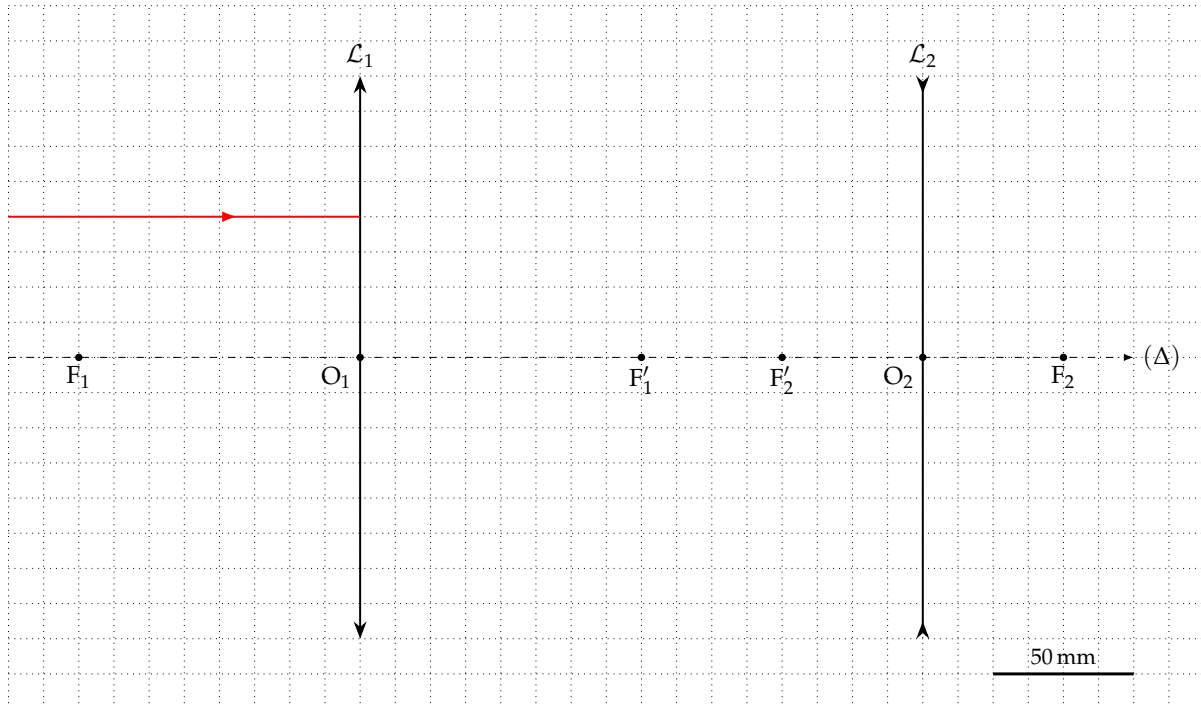
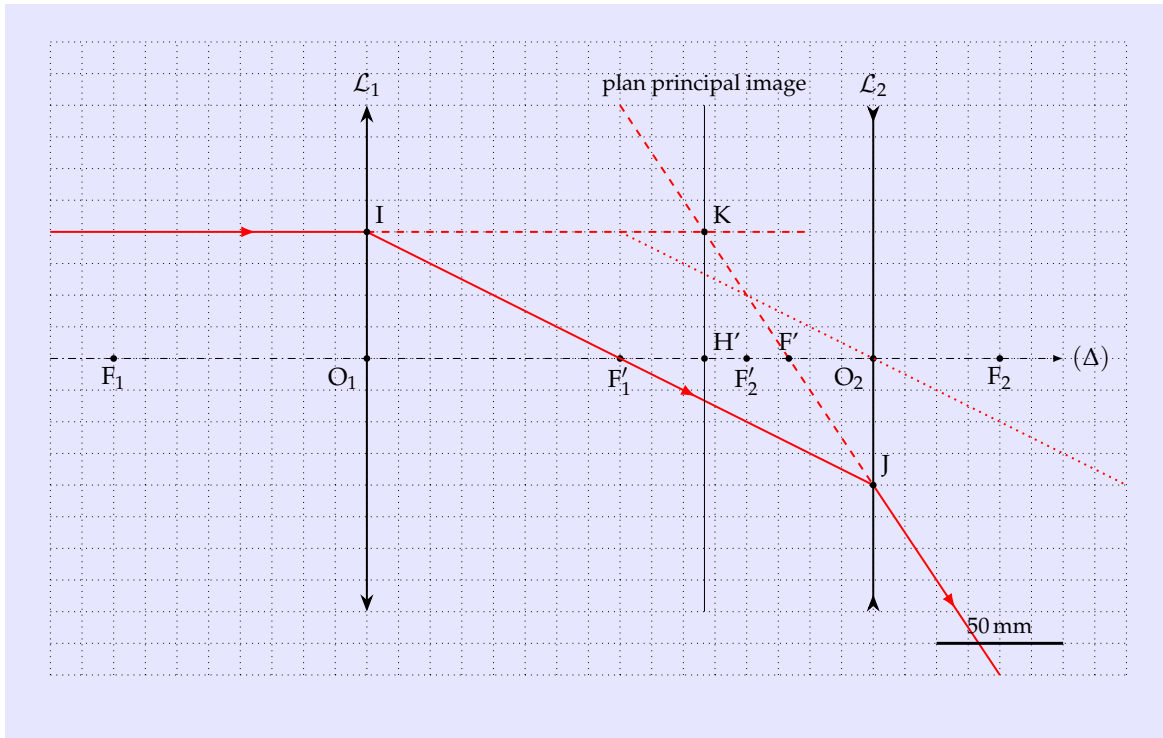


FIGURE 6 – Modèle à deux lentilles d'un objectif photographique

Le but de cette partie est de déterminer l'expression de la distance focale  $f'$  de l'objectif photographique. On confrontera ce résultat avec son encombrement lors du tournage de la scène *Get out of the water*.

On considère un rayon incident sur la lentille frontale  $\mathcal{L}_1$  parallèle à l'axe optique.

**Q8.** Tracer sur la figure 6 la marche complète de ce rayon. En déduire la position du foyer principal image  $F'$  du doublet.



La distance focale image  $f'$  du doublet est la distance entre son foyer principal image et le plan principal image. On positionne ce plan en trouvant l'intersection entre le prolongement d'un rayon incident parallèle à l'axe optique arrivant sur le doublet et le prolongement du rayon correspondant émergeant du doublet. On trace ensuite le plan perpendiculaire à l'axe optique qui contient ce point.

On note  $H'$  le point d'intersection entre le plan principal image et l'axe optique. La distance focale image du doublet est alors par définition  $f' = \overline{H'F'}$ .

**Q9.** Tracer sur la figure 6 le plan principal image du doublet. Positionner  $H'$ , puis mesurer  $f'$ .

Compte tenu de l'échelle, on mesure une distance  $\overline{H'F'}$  de 33 mm.

**Q10.** En observant attentivement la construction géométrique des deux questions précédentes, expliquer pourquoi une modélisation complète d'un objectif à focale variable comporte au moins une lentille supplémentaire, appelée *lentille compensatrice parfocale*, indispensable pour permettre la formation de l'image sur la pellicule.

Les objets photographiés étant à des distances grandes devant la focale de l'objectif, l'image se forme non loin de  $F'$ . On a alors une image virtuelle, impossible à observer sans système de projection (la lentille compensatrice).

Dans les objectifs réels, la position de la lentille compensatrice est mécaniquement asservie pour maintenir la mise au point quand on change la focale. Lors d'un travelling contrarié, le caméraman ne contrôle donc que la focale sans se préoccuper de la mise au point.

**Q11.** À l'aide d'un théorème géométrique, exprimer la distance  $\overline{O_2F'}$  en fonction de  $f'$ ,  $f_1'$  et  $e = \overline{O_1O_2}$ .

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{-\overline{O_2F'}}{-\overline{O_2J}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'K}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{F'_O_2}}{-\overline{O_2J}} = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_1I}}.$$

Puisque  $\overline{O_1I} = \overline{H'K}$ , il vient :

$$\frac{\overline{O_2F'}}{\overline{H'F'}} = -\frac{\overline{F'_O_2}}{\overline{O_1F'_1}} \quad \text{soit} \quad \frac{\overline{O_2F'}}{f'} = -\frac{e - f'_1}{f'_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_2F'} = -\frac{f'(e - f'_1)}{f'_1}}.$$

**Q 12.** Identifier le point conjugué du foyer principal image  $F'$  par la lentille arrière  $\mathcal{L}_2$ . Exploiter cette conjugaison et la relation établie à la question précédente pour montrer que

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}.$$

En décomposant la conjugaison, on constate que  $F'$  est le point conjugué de  $F'_1$  par  $\mathcal{L}_2$ . En effet :

$$A_{\infty \text{ sur } \Delta} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'$$

Puisque  $F'$  est le conjugué de  $F'_1$  par  $\mathcal{L}_2$ , on a :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{soit} \quad -\frac{f'_1}{f'(e - f'_1)} - \frac{1}{-(e - f'_1)} = \frac{1}{f'_2},$$

d'où :

$$-\frac{f'_1}{f'(e - f'_1)} = \frac{1}{-(e - f'_1)} + \frac{1}{f'_2}$$

et donc :

$$\frac{1}{f'} = -\frac{e - f'_1}{f'_1} \left( -\frac{1}{(e - f'_1)} + \frac{1}{f'_2} \right) = \frac{1}{f'_1} - \frac{e - f'_1}{f'_1 f'_2}$$

et finalement :

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}}.$$

Pour le tournage de la scène *Get out of the water*, la caméra était équipée d'un objectif *Angénieux 25-250mm High Precision* (Source : [camescoop.com](http://camescoop.com)), qui est présenté sur la figure 7. Les distances focales minimale et maximale de cet objectif sont :  $f'_{\min} = 25 \text{ mm}$  et  $f'_{\max} = 250 \text{ mm}$ . Le diamètre de la lentille frontale est de 136 mm.



FIGURE 7 – Objectif ANGÉNIEUX 25–250mm HP. Source : [rcservice.es](http://rcservice.es)

**Q 13.** Estimer l'encombrement de l'objectif *Angénieux 25-250mm High Precision* en calculant la valeur maximale de la distance inter-lentille  $e$ . Vérifier la vraisemblance des valeurs obtenues avec les photographies des figures 3 et 7.

On a

$$e = f'_1 f'_2 \left( \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{f'} \right).$$

L'application numérique donne

$$e_{\max} = 250 \text{ mm}.$$

Ce calcul semble indiquer que la taille de l'objectif de la caméra utilisée est environ de 30 cm.

Cet ordre de grandeur correspond bien à ce que l'on peut voir sur les figures 3 et 7. En effet :

- ➔ sur la figure 3 à droite, on peut voir que l'objectif n'est pas plus grand qu'un avant-bras, ce qui donne quelques dizaines de centimètres en OdG (*si la qualité de l'impression ne permet pas de distinguer ce détail sur la photo, le candidat pourra utiliser le second argument*);
- ➔ sur la figure 7, on peut voir que l'objectif est environ trois fois plus grand que le diamètre de sa lentille frontale, dont le diamètre est de l'ordre de la dizaine de centimètres (donné dans le texte).

## 4 Hypothèses sur le mouvement de *travelling*

Les photographies du tournage montrent que la caméra est déplacée sur un chariot conduit par des rails. *Attention, sur la figure 3, ces rails semblent inclinés par rapport à la plage; ils ne sont donc pas nécessairement horizontaux.*

La figure 8 représente l'évolution au cours du temps de la distance  $d$  entre la caméra et le sujet. Cette distance a été mesurée par un pointage image par image de la scène. On se propose d'exploiter ces données afin de caractériser le mouvement du chariot, puis d'en déduire la nature des forces qui s'exercent sur lui pendant la prise de vue. Les moyens techniques disponibles à l'époque ne permettent pas d'envisager une motorisation du chariot. Son mouvement résulte donc d'une action mécanique extérieure.

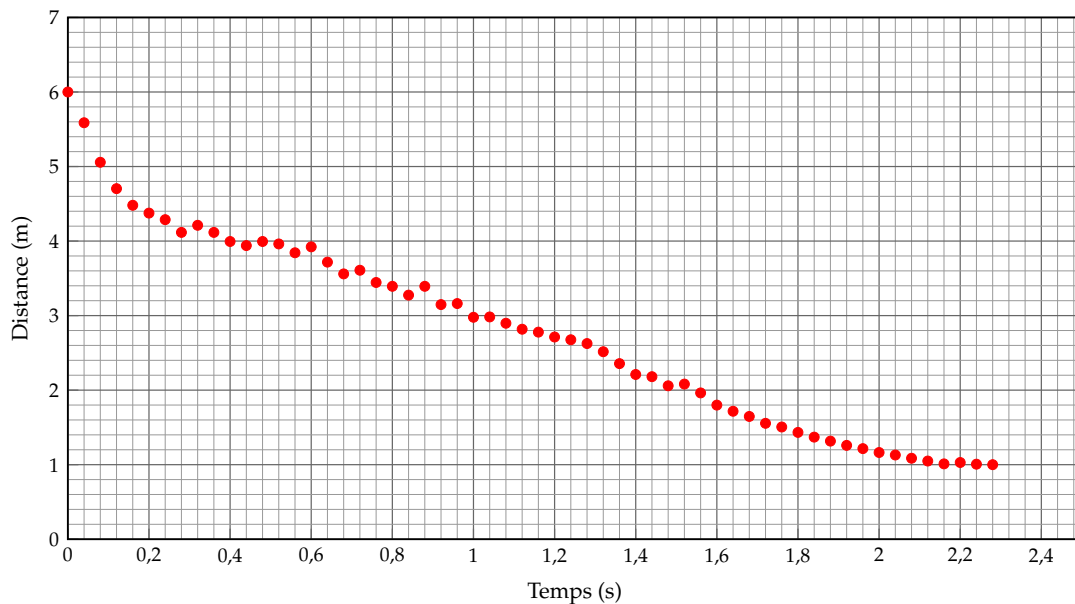


FIGURE 8 – Évolution temporelle de la distance sujet-caméra dans la scène *Get out of the water*.

**Q14.** À partir de la figure 8, décrire le mouvement du chariot au cours de la scène, puis proposer une hypothèse vraisemblable sur les forces susceptibles d’agir sur lui et la discuter.

Compte tenu de la situation étudiée, on peut envisager deux hypothèses sur les forces à l’œuvre :

- Hypothèse 1 : le chariot débute la scène immobile puis accélère sous l’effet de son propre poids. Il est soumis à son poids et à l’action du sol, avec un effet négligeable des frottements. La vitesse du chariot serait initialement nulle puis augmenterait avec le temps.
- Hypothèse 2 : le chariot est lancé avant le début de la scène puis ralentit sous l’effet des frottements et de l’action des machinistes sur le plateau. La vitesse du chariot serait d’abord maximale puis diminuerait avec le temps.

On étudie le mouvement du chariot dans le référentiel terrestre et on choisit la position initiale de la caméra comme origine du repère. On s’intéresse à l’évolution temporelle de la valeur de la vitesse que l’on obtient en prenant la valeur absolue de la dérivée de la distance  $d$ .

Sur la figure 8, on observe que la distance diminue fortement initialement puis de plus en plus lentement avec le temps. On a donc une vitesse initiale importante qui diminue jusqu’à s’annuler en fin de scène.

Ces observations sont en accord avec l’hypothèse 2 et en contradiction avec l’hypothèse 1.

## Problème 2

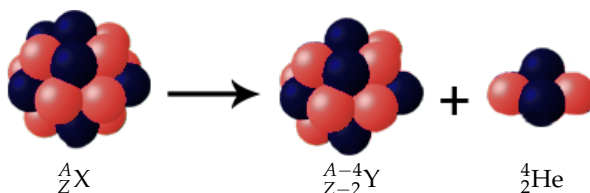
### Radioactivité alpha

Le noyau d'un atome  $X$ , noté  ${}^A_ZX$ , est constitué de  $A$  nucléons :  $Z$  protons de charge  $+e$  et  $N = A - Z$  neutrons dépourvus de charge. On considère que ces nucléons ont un rayon  $r_0$  de l'ordre de quelques femtomètres ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ).

#### Document 1 : Radioactivité alpha et taille des noyaux

« La cohésion du noyau résulte de l'interaction forte qui est portée par le pion, une particule de masse  $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$  pouvant être considérée comme quasi-ponctuelle. L'échange de pions entre nucléons crée une liaison nucléaire ayant une énergie, notée  $B$ , de l'ordre de quelques MeV (voir Document 2).

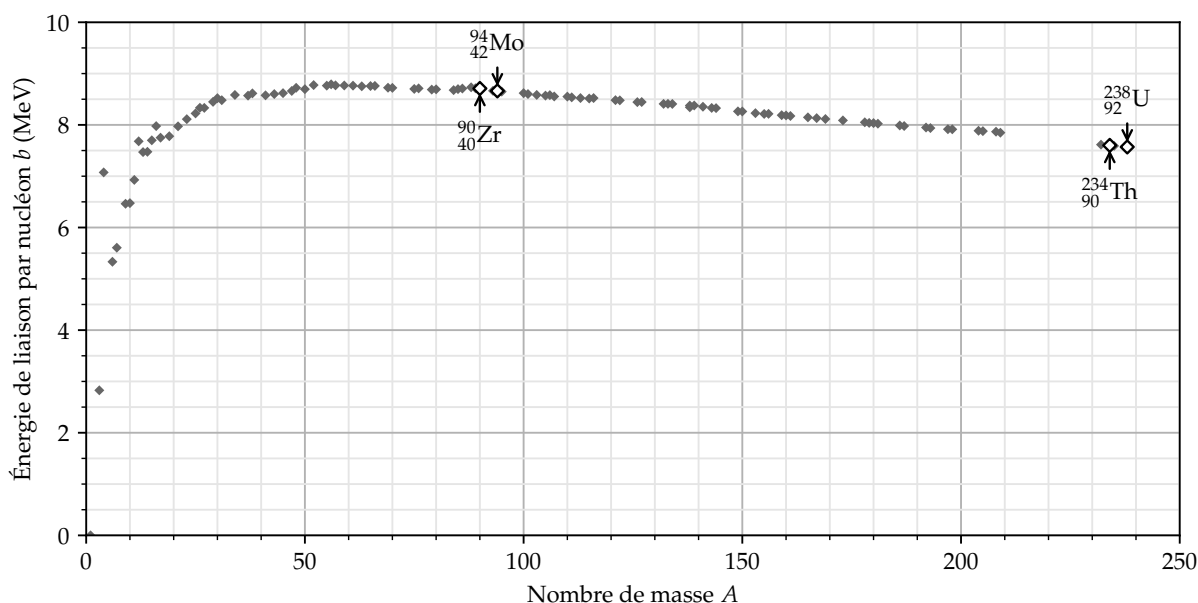
Certains noyaux lourds (tels que  $A \gg 1$ ) se désintègrent spontanément par radioactivité alpha en éjectant une particule alpha (c'est à dire un noyau de  ${}^4_2\text{He}$ ) :



Cela se produit lorsqu'il est énergétiquement plus favorable de rompre les liaisons nucléaires entre le noyau fils et la particule alpha que de les maintenir en présence de l'interaction coulombienne répulsive. »

Adapté de S. Wong, *Introductory Nuclear Physics*

#### Document 2 : Courbe d'Aston : Énergie de liaison par nucléon pour différents noyaux



La question **Q1.** peut être traitée indépendamment des suivantes.

**Q1.** Retrouver l'ordre de grandeur du rayon d'un nucléon  $r_0$  par analyse dimensionnelle, en fonction de la masse du pion  $m_\pi$ , de la constante de Planck réduite  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  et d'une autre constante fondamentale.

On adopte pour la suite la valeur  $r_0 = 1,3 \text{ fm}$ .

**Q2.** En précisant les hypothèses effectuées, donner une relation entre le rayon du noyau  $R_A$ , le nombre de masse  $A$ , et le rayon d'un nucléon  $r_0$ .

**Q3.** En précisant les hypothèses effectuées, déterminer l'énergie de séparation  $S$  en MeV de toutes les liaisons du noyau père qui sont rompues lors de la désintégration alpha.

**Q4.** En précisant les hypothèses effectuées, donner un critère sur le nombre de masse  $A$  à partir duquel un noyau peut être radioactif alpha. En déduire, selon ce critère, si le  ${}^{94}_{42}\text{Mo}$  et le  ${}^{238}_{92}\text{U}$  sont des noyaux radioactifs alpha. Commenter.

**R1.** Nous prenons ici en compte la masse du pion  $m_\pi$ , la constante de Planck réduite  $\hbar$  et la vitesse de la lumière  $c$ . L'équation aux dimensions est :

$$[r_0] = [m_\pi]^\alpha [\hbar]^\beta [c]^\gamma.$$

Sachant que  $[r_0] = L$ ,  $[\hbar] = ML^2T^{-1}$  et  $[c] = L.T^{-1}$ , nous en déduisons :

$$L^1 = M^\alpha M^\beta L^{2\beta} T^{-\beta} L^\gamma T^{-\gamma} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta \\ 0 = -\beta - \gamma \end{cases}$$

Les équations 2 et 3 donnent directement  $\alpha = -\beta = \gamma$ . Il nous suffit d'injecter ceci dans l'équation 1 et obtenir  $\gamma$  :

$$1 = 2 \times (-\gamma) + \gamma \Rightarrow \gamma = -1$$

Nous en déduisons directement  $\alpha = -1$  et  $\beta = 1$ . Ainsi :

$$r_0 \sim \frac{\hbar}{m_\pi c}$$

Nous pouvons ainsi donner un ordre de grandeur de  $r_0$  (sachant que  $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2 = 2,4 \times 10^{-28} \text{ kg}$ ) :

$$r_0 \sim \frac{\hbar}{m_\pi c} = \frac{1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{299\,792\,458 \text{ m/s} \times 2,4 \times 10^{-28} \text{ kg}} = 1,5 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Qui correspond à l'ordre de grandeur du rayon d'un nucléon (donné en début d'énoncé).

**R2.** Nous pouvons raisonner en termes de volume ici. Pour cela, nous considérons les nucléons et le noyau comme sphériques. Le noyau a un rayon  $R_A$  :

$$V_{\text{noyau}} = \frac{4}{3} \pi R_A^3$$

Un nucléon a un volume  $V_{\text{Nucléon}}$  tel que :

$$V_{\text{Nucléon}} = \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

Comme le noyau possède  $A$  nucléons, alors le volume du noyau est égal à  $A \times V_{\text{Nucléon}}$ . Ainsi :

$$\frac{4}{3} \pi R_A^3 = A \times \frac{4}{3} \pi r_0^3 \Rightarrow \boxed{R_A = r_0 \times A^{1/3}}$$

**R3.** En supposant que le noyau fils est au repos après désintégration du noyau père, l'énergie de séparation s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} S &= B(X) - B(Y) \\ &= Ab_X - (A - 4)b_Y \\ &= 4b_Y + A(b_Y - b_X) \end{aligned}$$

On peut voir, par lecture sur la courbe d'Aston, que le dernier terme est négligeable devant l'autre. En effet, si on considère que  $b_Y - b_X$  vaut environ un dixième de graduation, à savoir  $0,02 \text{ MeV}$ , alors  $A(b_Y - b_X) \simeq 2 \text{ MeV}$  pour  $A = 100$ . Dans ce cas :

$$S \simeq 4b_Y.$$

Cela donne  $S \simeq 4 \times 7,5 \text{ MeV} = 30 \text{ MeV}$  pour  ${}^{238}_{92}\text{U}$ ,  $S \simeq 4 \times 8,5 \text{ MeV} = 34 \text{ MeV}$  pour  ${}^{94}_{42}\text{Mo}$ . En l'état, il est équivalent d'estimer que cette énergie est aussi l'énergie pour former la particule alpha puisque :

$$4b_\alpha \approx 4 \times 7 \text{ MeV} = 28 \text{ MeV}.$$

**R 4.** D'après le document 1, il y a radioactivité alpha quand l'énergie des liaisons nucléaires entre le noyau fils et la particule alpha est comparable à l'énergie d'interaction coulombienne :

$$S \simeq \frac{2e \times (Z - 2)e}{4\pi\epsilon_0 R_A}$$

Nous avons ici considéré que la distance entre le noyau fils et la particule alpha était  $R_A = r_0 A^{1/3}$ . On suppose qu'après la séparation, le noyau fils et la particule alpha sont quasiment au contact : la distance typique entre le centre du noyau fils et le centre de la particule alpha est à peu près  $R_A$  (autre façon plus formelle : comparer  $(A - 4)^{1/3}$  et  $A^{1/3}$  et voir que les rayons associés sont équivalents pour des noyaux lourds).

Nous pouvons donner un encadrement de  $A$  en supposant que  $N/Z \in [1; 1,5]$ . Cherchons  $A_{\min}$  dans les deux cas :

—  $N \simeq Z$  :

$$1 \sim \frac{e^2(A - 4)}{4\pi\epsilon_0 R_A S} \underset{A \gg 1}{\simeq} \frac{e^2 A}{4\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3} S} = \frac{e^2 A^{2/3}}{4\pi\epsilon_0 r_0 S}$$

À partir de là, nous pouvons isoler le nombre de nucléons et ainsi définir le nombre minimal de nucléons nécessaires à la radioactivité alpha :

$$A_{\min}^{N \simeq Z} = \left( \frac{4\pi\epsilon_0 r_0 S}{e^2} \right)^{3/2}$$

L'application numérique donne :

$$A_{\min}^{N \simeq Z} = \left( \frac{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 1,3 \times 10^{-15} \times 4 \times 8 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{(1,6 \times 10^{-19})^2} \right)^{3/2} \simeq 156$$

—  $N \simeq 1,5Z$  (la démarche est la même) :

$$A_{\min}^{N \simeq 1,5Z} = \left( \frac{5\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 1,3 \times 10^{-15} \times 4 \times 8 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{(1,6 \times 10^{-19})^2} \right)^{3/2} \simeq 217$$

Le critère obtenu montre que la radioactivité alpha devient possible pour des noyaux dont le nombre de nucléons est compris approximativement entre  $A \simeq 156$  et  $A \simeq 217$ , selon le rapport  $N/Z$  choisi. Dans ces conditions,  ${}^{94}_{42}\text{Mo}$ , avec  $A = 94$ , est très en dessous du seuil minimal : il ne peut donc pas être  $\alpha$ -radioactif. En revanche,  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , avec  $A = 238$ , est au-dessus de ce seuil : l'émission d'alpha y est énergétiquement possible. On conclut que  ${}^{94}\text{Mo}$  est stable vis-à-vis de la désintégration  $\alpha$ , tandis que  ${}^{238}\text{U}$  est radioactif alpha.

Dans la nature, les noyaux lourds commencent à être radioactifs alpha pour  $A \gtrsim 150$  : notre estimation est donc relativement satisfaisante par rapport à l'expérience. Cependant, les hypothèses classiques que nous avons faites sont très simplistes et ne prennent pas en compte le caractère quantique des noyaux. En effet, la résolution a supposé plusieurs approximations discutables :

- l'énergie de séparation ne dépend pas seulement de l'énergie de liaison, mais aussi des énergies cinétiques du noyau fils et de la particule alpha ;
- l'énergie d'interaction coulombienne a été calculée en supposant que le noyau fils et la particule alpha étaient ponctuels, ce qui n'est pas exact en pratique ;
- l'approximation géométrique selon laquelle la distance entre le noyau fils et la particule alpha est très simplificatrice car en réalité, ces deux noyaux ne sont plus au contact après séparation (ce qui modifie l'interaction coulombienne) ;
- l'effet tunnel n'a pas été pris en compte dans la compétition entre le potentiel fini du noyau et la barrière coulombienne (aucun calcul semi-classique issu du modèle de Gamow n'a été effectué) ;
- nous avons choisi d'encadrer  $N/Z$  entre 1 et 1,5, alors qu'une loi empirique liant  $A$  et  $Z$  existe. Cette simplification peut inclure des noyaux qui ne sont pas réellement radioactifs alpha.