

Programme de colle numéro 3 - semaine du 5 octobre

La colle débutera par une ou plusieurs définitions suivi par une ou plusieurs questions de cours citées en page 2.
Le cours doit être parfaitement su.

Nombres complexes - fin

Toutes les notions vues les semaines précédentes, en particulier, **racines n -ième de l'unité** avec en plus

- **Exponentielle complexe** (définition, propriétés, relations fonctionnelles, équation $e^z = a$ pour $a \in \mathbb{C}$)
- **Similitudes du plan** Expression complexe des transformations affines du plan telles que réflexion par rapport à (Ox) , translations, rotations et homothéties.

Définition d'une similitude directe (*toute application $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ pour laquelle il existe $\lambda > 0$ vérifiant $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, f(A)f(B) = \lambda AB$ et qui préserve l'orientation des angles.* On **admet** que les similitudes directes sont les applications qui s'écrivent comme composées de fonctions des types suivants : translations, rotations, homothéties.

Théorème : les similitudes directes sont les applications d'expression complexe : $z \mapsto az + b$.

Utilisation des nombres complexes en géométrie (exercices).

Tout exercice sur le chapitre Nombres complexes utilisant en particulier les racines n -ième de l'unité, l'exponentielle complexe, ou de la géométrie plane.

Logique et notations sur les ensembles

Fin du chapitre avec en particulier le produit cartésien.

Notion d'applications (le début)

1. Définition. Graphe. Image et antécédent. Restriction et prolongement.
2. Composition. Définitions, exemples. Associativité de la composition.
3. Injection, surjection, bijection. Propriété de la composée. Bijection réciproque.

Le cours n'est pas fini.

Reporté à la semaine prochaine : Image directe et image réciproque d'une partie. Familles

QUESTIONS DE COURS (Définitions puis QC) :

Cette semaine, la colle commencera par la **vérification de la connaissance précise des définitions du cours Applications** : exemples : définition de $\text{Im } f$, ou définition du mot antécédent, et/ou définition du mot Graphe, et/ou définition de f fonction injective, surjective, ou bijective.

Ensuite une ou plusieurs Questions de cours :

- Justifier que $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$.
Résoudre $e^z = 1 - i$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) avec représentation des solutions dans le plan complexe
OU résoudre $e^z = a$ où $a \in \mathbb{C}^*$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) avec représentation des solutions dans le plan complexe.
- Reconnaître la transformation du plan d'écriture complexe donnée par $f(z) = (1 + i)z - 2$ et/ou n'importe quel exemple du type $f(z) = az + b$ où (a, b) est choisi par le colleur dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$
ou donner l'écriture complexe d'une similitude dont les éléments caractéristiques sont donnés par le colleur ; par exemple écriture complexe de :
 - la translation de vecteur $\vec{u}(5, -1)$
 - la rotation de centre $\Omega(1, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$
 - l'homothétie de centre O et de rapport -3
 - de la similitude de centre $I(-1, 1)$, d'angle $\pi/4$ et de rapport 2
- Exo Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On considère les applications suivantes : $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{cases}, \Phi : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{cases}$,
 $f_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{cases}$ et $\cos : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases}$
Étudier, pour chacune des applications ci-dessus, l'injectivité, la surjectivité et préciser l'espace image.
(On s'appuiera sur le cours Nombres complexes : par exemple, l'étudiant doit savoir donner le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$ en fonction de $a \in \mathbb{C}$ mais n'est pas obligé de le redémontrer.)
- Exo (sera corrigé lundi) Soit A, B, C trois points distincts du plan d'affixes notés a, b, c . CNS sur a, b, c pour que ABC soit un triangle équilatéral.
- Pour travailler sur les notations ensemblistes.
Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de parties d'un ensemble E. Soit x un élément de E. Écrire les assertions suivantes en utilisant uniquement les symboles $\in, \cup, \cap$ et $\bar{}$ (passage au complémentaire) :
 - a) «à partir d'un certain rang x appartient à tous les ensembles A_i »
 - b) « x appartient à une infinité d'ensembles A_n »
- Associativité du produit de composition
- Exo Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on considère $T : E \rightarrow E$ qui à $f \in E$ associe l'application $T(f)$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = f(x + a)$$
 - (a) Déterminer $T \circ T$ (c'est-à-dire expliciter pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $T \circ T(f)(x)$ en justifiant. On prendra garde aux fautes d'homogénéité).
 - (b) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $T^{\circ n} := T \circ T \circ \dots \circ T$ (T composée n fois) en rédigeant la récurrence.
- résultat de cours. Démo à travailler pour consolider les méthodes de démonstration et la présentation des variables.
Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications.
 - (a) Démontrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
 - (b) Démontrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- résultat de cours. Démo à travailler pour consolider les méthodes de démonstration et la présentation des variables.
Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer
 - (a) $g \circ f$ injective $\implies f$ injective
 - (b) $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective
- On note I l'intervalle $I =]1, +\infty[$. Soit f la fonction définie sur I par l'expression $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.
 - (a) Tracé rapide du graphe de f . Établir, à l'aide des résultats d'analyse vus au lycée, que f réalise une bijection de I sur J où J est un intervalle que l'on déterminera.
 - (b) Déterminer l'expression de la réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$

PRÉVISIONS :

semaine 4 : Fin du chapitre application (image directes, images réciproque) et exercices sur ces thèmes.

semaine 5 Révision et compléments d'analyse réelle (à ce stade les résultats sont admis), puis étude des fonctions usuelles (fonction puissance d'exposant réel, arcsin, arccos, arctan, ch, sh, th).