

Programme de colle - semaine 4- du 12 octobre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

A- Applications

1. Définition. Graphe. Image et antécédent. Restriction et prolongement.
2. Composition. Définitions, exemples. Associativité de la composition.
3. Injection, surjection, bijection. Propriété de la composée. Bijection réciproque.
4. Image directe et image réciproque d'une partie. Familles

tout exercice sur le sujet.

B - Révision d'analyse et compléments

la notion de limite est admise (pas de définition pour l'instant autre qu'intuitive). Continuité en un point, sur un domaine.

— Énoncés ci-dessous à connaître parfaitement (*) (**résultats admis à ce stade de l'année** :

- Passage à la limite dans une inégalité.
- Théorème d'encadrement.
*On veillera à ce que les élèves ne confondent pas ces deux premiers résultats et qu'ils vérifient que toutes les limites existent avant de passer aux limites dans une inégalité.
On corrigera les lim écrits trop tôt (avant de savoir que la limite existe).*
- Théorème des valeurs intermédiaires (dans ses différentes versions) : si f continue sur $[a, b]$ et si y est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, alors y possède au moins un antécédent dans $[a, b]$ ou "l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle".
- Théorème de la bijection monotone (*on a admis la continuité de la réciproque*).
- Règles opératoires sur les dérivées ; en particulier dérivée d'une composée ; *énoncés démontrés mais dans le cas de la composition $g \circ f$ on s'est contenté, pour l'instant, d'une preuve avec f injective.
On veillera à l'écriture $f'(x)$ et on corrigera les $(f(x))'$ qui traînent encore parfois*
- Lien entre le signe de la dérivée et la monotonie de la fonction sur des intervalles.
- Théorème de la limite monotone (énoncé dans le cas d'une fonction monotone sur $[a, b[$ pour la limite en b dans $\bar{\mathbb{R}}$.)
- Théorème de dérivabilité d'une application réciproque (*on l'a démontré en admettant la continuité de f^{-1}*).

NB cette année, **les élèves ne savent pas encore déterminer l'existence d'une droite asymptote oblique (ou d'une autre branche infinie)**. La notion sera vue lors du chapitre DL et équivalents.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

La colle démarrera par des définitions sur les applications : **injectivité, surjectivité, bijectivité, espace image, définition des images directes et réciproques d'une partie par une application**

1. *résultat de cours. Démo à travailler pour consolider les méthodes de démonstration et la présentation des variables.*

Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer

- (a) f et g injectives $\implies g \circ f$ injective.
- (b) f et g surjectives $\implies g \circ f$ surjective.
- (c) $g \circ f$ injective $\implies f$ injective
- (d) $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective

2. *résultat de cours*

Démontrer que si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, pour $A \subset E$ et $B \subset G$, on a

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \text{ et } g \circ f(A) = g(f(A))$$

3. *Exo*

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et A et A' deux parties de E .

- a) Montrer que $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- b) Montrer que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
- c) Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- d) Montrer que l'on a $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

Montrer par un exemple que l'inclusion inverse est fautive en général.

Montrer que, si l'on suppose f injective, alors on a l'égalité $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

4. *Exo (3.7 Q1) (pour les raisonnements et la présentation des variables).*

Soit f une application de A dans B . Montrer que f est injective si et seulement si quelle que soit la partie X de A , on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

5. *Exo* Allure locale au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto \sqrt{|\ln x|}$

6. *Exo* Si f est une fonction réelle continue sur $[a, b]$ avec $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

7. *Exo* Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ possède un unique point fixe a sur $\mathbb{R}$, et que celui-ci vérifie $a \in [0, 1]$

8. *Exo* Montrer que l'application $u : x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (on a raisonné par l'absurde et utilisé le principe de composition des limites avec des suites bien choisies qui tendent vers 0.) Ou (similaire) montrer que $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.

9. Énoncé et démonstration du théorème de dérivabilité d'une réciproque d'une bijection dérivable sur un intervalle I . On a admis, à ce stade de l'année, la continuité de f^{-1}

10. *Exo* $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[1, +\infty[$. Étude de la dérivabilité de f^{-1} et expression simple de $(f^{-1})'(t)$ lorsqu'elle a du sens.

PRÉVISIONS : Sem 5 : effet des transformations usuelles sur les graphes. Fonction puissance d'exposant réel, croissances comparées. Étude de arcsin, arccos, arctan, ch, sh, th