

Programme de colle - semaine 5 - 2 novembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle.
Le cours doit être parfaitement su.

Révision des théorèmes d'analyse

comme le programme précédent avec en plus

- position relative des tangentes et des cordes pour une fonction f convexe dérivable. Application aux fonctions usuelles ($x \mapsto \ln(1+x)$, $\exp$, $\sin$...)
- Effet des transformations élémentaires du plan sur le graphe d'une fonction, en particulier, à partir du graphe d'une fonction f savoir construire le graphe de $x \mapsto f(x+a)$, de $x \mapsto f(x)+b$, de $x \mapsto f(T-x)$, de $x \mapsto f(ax)$, de $x \mapsto af(x)$.
Savoir déterminer si une fonction possède une symétrie par rapport à une droite d'équation $x=a$.

Nouvelles fonctions usuelles

1. Fonctions puissances d'exposant réel : Définition, étude, graphe, convexité.
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$. Résultats de croissances comparées de ces fonctions en 0 et $+\infty$ avec $\ln$ et $\exp$.
exo : étude de $x \mapsto x^x$, de $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et les élèves doivent connaître $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ (et savoir le justifier)
2. Fonctions arcsin, arccos, arctan
3. Fonctions hyperboliques ch, sh, relation $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$, paramétrisation de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, fonction th.
Les formules d'addition des fonctions hyperboliques ne sont pas exigibles des étudiants, en cas de besoin lors d'un exercice, on les donnera (à démontrer ou non).

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. (a) Donner le graphe de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ à partir du graphe de $\ln$ (et position de la tangente en 0) et/ou celui de $x \mapsto \sqrt{2-x}$ à partir de $\sqrt{\cdot}$.
(b) Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, savoir caractériser " Γ_f a une symétrie par rapport à la droite $x=a$ ".
2. (a) Définition de la notation x^α
(b) Démonstrations des règles sur les exposants : pour $x > 0, y > 0, \alpha, \beta$ réels, valeurs de $x^{-\alpha}, x^{\alpha+\beta}, (x^\alpha)^\beta$, et $(xy)^\alpha$.
(c) Graphes de $x \mapsto x^\alpha$ (sans démonstration) selon les valeurs de α . *On précisera quels exposants α ont permis un prolongement par continuité en 0 et parmi eux ceux qui donnent une fonction dérivable en 0.*

3. *exo* Déterminer l'expression de la dérivée n ème de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. *On veillera à ce que les élèves écrivent $1/x^n = x^{-n}$ avant de dériver, pour dériver comme une fonction puissance et non comme un quotient.*
4. Définition de arcsin. Justifier que arcsin est impaire. Et graphe.
5. Formule $\cos(\arcsin x)$ (à redémontrer).
Dérivabilité de la fonction arcsin et expression de la dérivée.
Connaître $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$ et justifier
6. Formule $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$
7. *exo*
 - (a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$.
 - (b) Expression de $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ si $x \in [-1, 0]$.
8. Dérivabilité de la fonction arctan et expression de sa dérivée.
9. Formule $\arctan x + \arctan(1/x) = \text{signe}(x) \frac{\pi}{2}$
10. Graphes de ch, sh ou th et expression de leurs dérivées (à donner immédiatement sans exiger de démonstration).
11. *Reprise d'une correction de devoir* : soit ω un nombre irrationnel :
montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2, (a + b\omega = 0 \implies (a, b) = (0, 0))$.

PRÉVISIONS : semaine 6 Calcul Intégral (Changements de variable, IPP)

N.B. La semaine 6 (commençant le 9 novembre) comprend le **mercredi 11 novembre** férié ; les colles de ce jour seront déplacées. Pour information : Il n'y aura pas de colle en MATH la semaine 7 (semaine du 16 novembre), les colles du mercredi 11 novembre pourraient par exemple être décalées au mercredi 18 novembre en vérifiant disponibilité des colleurs et élèves (attention, les colles en semaine 7 se poursuivent dans les autres matières). Les colleurs doivent s'organiser et prévenir les étudiant.es pour organiser le déplacement de la colle du 11 novembre
Les colles en MATH reprendront ensuite en semaine 8 (16 novembre) avec le colloscope de la semaine 8

Bonnes vacances !