Devoir Surveillé n°4 – Corrigé

III Supercondensateur

1. (a) L'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ (voir cours) est :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}\,u_C(t) = \frac{E}{\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = r_E C_0$$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_C(0) = u_C(0^-) = 0$ (condensateur déchargé à $t = 0^-$). On en déduit que (voir cours) :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

(b) La condition $u_C > 1{,}75$ V impose de résoudre :

$$E - u_C = E\,e^{-t/\tau} < 0{,}25 \text{ V}$$

c'est-à-dire $$\boxed{t > \tau \ln\left(\frac{E}{0{,}25 \text{ V}}\right) = 6{,}6 \times 10^3 \text{ s} = 1{,}84 \text{ h}}$$

(c) Par définition, $\boxed{i(t) = \mathrm{C}_0 \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$

2. L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur s'écrit

$$\boxed{\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,{\mathrm{U_C}}^2}$$

d'où $\boxed{\mathrm{C}_m = \dfrac{2\mathcal{E}_n}{{\mathrm{U}_n}^2} = 800\ \mathrm{F}}$

3. (a) Association en série (voir cours) :

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{C_{eq}}} = \frac{1}{\mathrm{C}_1} + \frac{1}{\mathrm{C}_2}}$$

(b) Association en parallèle (voir cours) :

$$\boxed{\mathrm{C_{eq}} = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2}$$

(c) Pour p condensateurs en parallèle (resp. en série), le condensateur équivalent a une capacité de $p\mathrm{C}_0$ (resp. C_0/q). On doit réaliser p associations parallèle de q condensateurs en série. La capacité de l'ensemble est

$$\mathrm{C_{eq}} = \frac{p}{q}\,\mathrm{C}_0$$

L'ensemble des condensateurs doit stocker une énergie $\mathcal{E}_n$ (question 2) et doit donc avoir une capacité C (calculée à la question 2), d'où

$$\mathrm{C} = \frac{p}{q}\,\mathrm{C}_0$$

De plus, la tension de chaque branche en série de condensateur doit être égale à U_n (les branches en parallèle ont la même tension). Chaque condensateur de chaque branche en série a donc une tension de U_n/q (condensateurs identiques). Cette tension ne doit pas excéder $\mathrm{U_{max}}$. On doit alors vérifier les deux conditions suivantes :

$$\frac{\mathrm{U}_n}{q} \leqslant \mathrm{U_{max}} \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = \frac{p}{q}\,\mathrm{C}_0$$

d'où $$q > \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U_{max}}} = 175{,}4 \quad \text{et} \quad p = q\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}_0} = 44$$

d'où $\boxed{q = 176 \qquad \text{et} \qquad p = 44}$

4. (a) Le module a une capacité C_m. D'après la question 1.a, la durée caractéristique de la charge est

$$\boxed{\tau_1 = r_\mathrm{E}\,\mathrm{C}_m = 800\ \mathrm{s} = 13\ \mathrm{min}\,20\ \mathrm{s}}$$

(b) La puissance fournie par le générateur (en convention générateur), notée $\mathrm{P_E}$, est :

$$\boxed{\mathrm{P_E} = \mathrm{E}\,i(t) = \frac{\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}}$$

Cette puissance est maximale en $t = 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{P_{E,max}} = \frac{\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{E}} = 250\ \mathrm{kW}}$$

(c) La puissance dissipée par effet Joule est $\mathrm{P_J} = r_\mathrm{E}\, i(t)^2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{P_J} = \frac{\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau_1}}$$

$\mathrm{P_J} = \mathrm{P_E}$ si et seulement si (par identification) :

$$\boxed{t = \tau_1 \ln 2 = 554\ \mathrm{s} = 9\ \mathrm{min}\ 15\ \mathrm{s}}$$

5. L'énergie fournie par le générateur entre $t = 0$ et $t = +\infty$ s'écrit

$$\mathcal{E}_\mathrm{E} = \int_{t=0}^{+\infty} \mathrm{P_E}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{E}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{C}_m\mathrm{E}^2$$

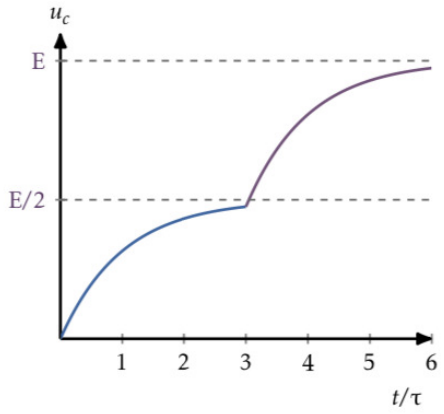
Entre ces mêmes instants, la tension du condensateur varie de 0 à E, d'où

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{C}_m\,\mathrm{E}^2 - 0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{C}_m\,\mathrm{E}^2$$

Par conséquent $\boxed{\dfrac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{E}_\mathrm{E}} = \dfrac{1}{2}}$

50% de l'énergie délivrée par le générateur est dissipée par effet Joule.

6. (a) La constante de temps est là même (indépendante de la tension du générateur)/ L'allure est donc donnée ci-dessous :



(b) L'énergie reçue par le condensateur ne dépend que de sa tension u_C. Cette tension varie au total entre 0 et E :

$$\boxed{\mathcal{E}'_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{C}_m\,\mathrm{E}^2}$$

Lors de la première phase, en reprenant les résultats de la première partie en changeant E en E/2 :

$$i_1(t) = \frac{\mathrm{E}}{2r_\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

Au cours de la seconde phase, la tension du condensateur passe de E/2 à E. La variation de tension du générateur est donc de E/2. Le courant i_2 lors de la seconde phase a donc la même expression que $i_1(t)$. L'énergie dissipée par effet Joule s'écrit

$$\mathcal{E}'_\mathrm{J} = \int_{t=0}^{+\infty} r_\mathrm{E}\, {i_1}^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{+\infty} r_\mathrm{E}\, {i_2}^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{E}^2}{2r_\mathrm{E}} \int_{t=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t/\tau_1}\,\mathrm{d}t$$

d'où $$\boxed{\mathcal{E}'_{\mathrm{J}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{C}_m\,\mathrm{E}^2}$$

(c) L'énergie totale fournie par le générateur est donc

$$\boxed{\mathcal{E}'_{\mathrm{E}} = \mathcal{E}'_n + \mathcal{E}'_{\mathrm{J}} = \frac{3}{4}\,\mathrm{C}_m\,\mathrm{E}^2}$$

On remarque d'après ces deux dernières question que l'énergie fournie par le générateur est plus faible, donc moins couteuse, et l'énergie perdue par effet Joule est divisée par deux.

Par contre, contrairement à une charge simple, le temps nécessaire est deux fois plus long.

7. (a) Comme $i > 0$, on peut alors modéliser le moteur par une source idéale de tension $u_p = +\mathrm{U}_p$. En faisant attention à la convention générateur du condensateur et à la convention récepteur du moteur, la loi des mailles donne

$$u_c(t) = \mathrm{U}_p + (r_m + r_p)\,i(t)$$

Or $i(t) = -\mathrm{C}_m\,\dot{u}_c$ (convention générateur). L'équation différentielle devient donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(r_m + r_p)\,\mathrm{C}_m}\,u_c(t) = \frac{\mathrm{U}_p}{(r_m + r_p)\mathrm{C}_m}}$$

La tension du condensateur étant initialement chargé avec $u_c(0^-) = \mathrm{E}$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_c(0) = \mathrm{E}$. La solution s'écrit alors

$$\boxed{u_c(t) = \mathrm{U}_p + (\mathrm{E} - \mathrm{U}_p)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} \quad \text{avec} \quad \tau_2 = (r_m + r_p)\mathrm{C}_m}$$

(b) Déterminons l'expression de l'intensité :

$$i = -\mathrm{C}_m\,\dot{u}_c = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{U}_p}{r_m + r_p}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

Le moteur est en convention récepteur. La puissance reçue est donc

$$\mathrm{P}_m = \mathrm{U}_p\,i(t) = \frac{\mathrm{U}_p(\mathrm{E} - \mathrm{U}_p)}{r_m + r_p}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

(c) À $t = 0$, la puissance initiale est maximale lorsque $\mathrm{U}_p(\mathrm{E} - \mathrm{U}_p)$ est le plus grand possible. On reconnait une parabole qui s'annule en $\mathrm{U}_p = 0$ et $\mathrm{U}_p = \mathrm{E}$. Son maximum est donc en $\mathrm{U}_p = \mathrm{E}/2$ (on peut aussi calculer la dérivée), donc

$$\boxed{\mathrm{U}_{\mathrm{p,max}} = \mathrm{E}/2}$$

La puissance associée est donc

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathrm{m,max}} = \frac{\mathrm{E}^2}{4(r_m + r_p)} = 63\ \mathrm{kW} \simeq 86\ \mathrm{cheval-vapeur}}$$

On peut donc alimenter une voiture « citadine ».

8. (a) Si on impose un courant I_p constant dans le circuit : $i(t) = \mathrm{I}_p$. Avec $i = -\mathrm{C}_m\,\dot{u}_c$ (convention générateur), on peut alors intégrer cette équation avec la condition initiale $u_c(0) = \mathrm{E}$:

$$\boxed{u_c(t) = \mathrm{E} - \frac{\mathrm{I}_p\,t}{\mathrm{C}_m}}$$

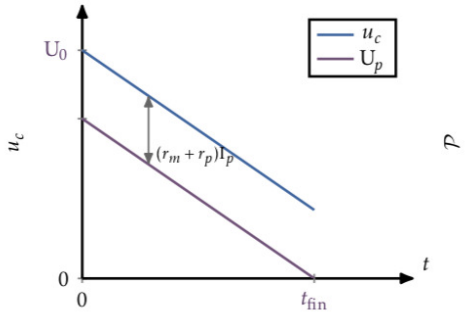
D'après la loi des mailles, $u_c = \mathrm{U}_p(t) + (r_m + r_p)\,i(t)$ d'où

$$\boxed{\mathrm{U}_p(t) = \mathrm{U}_0 - (r_m + r_p)\,\mathrm{I}_p - \frac{\mathrm{I}_p t}{\mathrm{C}_m}}$$

Toutes ces relations ne sont valables que si $\mathrm{U}_p \geqslant 0$, c'est-à-dire tant que

$$t \leqslant t_{\text{fin}} = \frac{\mathrm{C}_m \mathrm{E}}{\mathrm{I}_p} - \mathrm{C}_m(r_m + r_p)$$

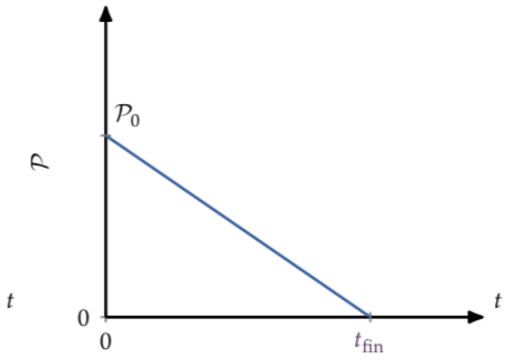
L'allure de ces deux courbes est :



(b) L'expression de la puissance reçue par le moteur est

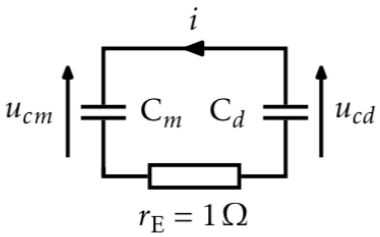
$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{U}_p(t)\,\mathrm{I}_p = \mathrm{E}\mathrm{I}_p - (r_m + r_p)\mathrm{I}_p^2 - \frac{\mathrm{I}_p^2 t}{\mathrm{C}_m}}$$

L'allure est la suivante :



9. Le condensateur C_d joue le rôle de générateur de tension. Prenons par exemple la convention récepteur pour C_m et générateur pour C_d (en faisant attention aux différentes formules). On a alors les relations suivantes (voir schéma) :

$$i = \mathrm{C}_d\,\dot{u}_{\mathrm{C}_d} = -\mathrm{C}_m\,\dot{u}_{\mathrm{C}_m}$$



La relation précédente impose donc notamment

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{C}_m u_{\mathrm{C}_m} + \mathrm{C}_d u_{\mathrm{C}_d}\Big) = 0$$

c'est-à-dire $$\mathrm{C}_m u_{\mathrm{C}_m}(t) + \mathrm{C}_d u_{\mathrm{C}_d}(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}, \forall t$$

La constante peut être évaluée en $t = 0$ où $u_{\mathrm{C}_d}(0) = \mathrm{E}$ et $u_{\mathrm{C}_m}(0) = \mathrm{U}_0 = 80$ V, d'où

$$\mathrm{C}_m u_{\mathrm{C}_m}(t) + \mathrm{C}_d u_{\mathrm{C}_d}(t) = \mathrm{C}_m \mathrm{U}_0 + \mathrm{C}_d \mathrm{E}$$

En fin de charge, les deux condensateurs ont la même tension donc $u_{\mathrm{C}_m}(\infty) = u_{\mathrm{C}_d}(\infty) = \mathrm{U}_\infty$. La relation précédente impose alors

$$\boxed{\mathrm{U}_\infty = \frac{\mathrm{C}_m\,\mathrm{U}_0 + \mathrm{C}_d \mathrm{E}}{\mathrm{C}_m + \mathrm{C}_d} = 360 \text{ V}}$$