Semaine 15 du 22 au 26 janvier 2024

Limites et continuité

I) Limite finie en un point

- Limite finie ou infinie en a d'une fonction à valeurs réelles ou complexes
- Unicité de la limite
- Si f définie en a admet une limite en a, cette limite est $f(a)$
- Si f possède une limite finie en a elle est bornée au voisinage de a
- Limite à gauche et à droite
- Caractérisation séquentielle

II) Opérations sur les limites, théorèmes d'existence

- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition
- Passage à la limite d'une inégalité large
- Existence d'une limite par encadrement, minoration, majoration
- Théorème de la limite monotone

III) Continuité en un point

- Continuité à gauche, à droite, prolongement par continuité
- Caractérisation séquentielle
- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition

IV) Continuité sur un intervalle

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Cas d'une fonction continue strictement monotone
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Théorème des bornes atteintes
- Toute fonction réelle continue sur un intervalle et injective est strictement monotone
- Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle admet une bijection réciproque continue et de même monotonie

V) Continuité uniforme

- Fonctions lipschitziennes
- Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues
- Théorème de Heine

Dérivation d'une fonction de variable réelle

I) Nombre dérivé, fonction dérivée

- Nombre dérivé défini par la limite du taux d'accroissement
- Caractérisation de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire
- Développement limité à l'ordre 1
- Interprétation géométrique et cinématique
- Dérivabilité à gauche, à droite
- Dérivée sur un intervalle

II) Opérations sur les fonctions dérivables

- Combinaison linéaire
- Produit, quotient, composée
- Dérivée d'une bijection réciproque

III) Propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles

- Tout extremum local en un point intérieur est un point critique
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis (égalité)
- Inégalité des accroissements finis
- Application : suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$
- Théorème de la limite de la dérivée

Démonstrations exigibles

Continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème de Heine

Dérivation

- Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1
- Condition nécessaire d'extremum local : point critique
- Théorème de Rolle
- Égalité des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Théorème de la limite de la dérivée

Ex. prép.

Limites

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et de limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.
- Donner un exemple de fonction continue mais pas uniformément continue.
- Donner un exemple de fonction uniformément continue non lipschitzienne

Dérivabilité

- Soit f à valeurs réelles, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, vérifiant $f(a) = \lim\limits_{+\infty} f$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.