

Dérivation d'une fonction de variable réelle

I) Nombre dérivé, fonction dérivée

- Nombre dérivé défini par la limite du taux d'accroissement
- Caractérisation de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire
- Développement limité à l'ordre 1
- Interprétation géométrique et cinématique
- Dérivabilité à gauche, à droite
- Dérivée sur un intervalle

II) Opérations sur les fonctions dérivables

- Combinaison linéaire
- Produit, quotient, composée
- Dérivée d'une bijection réciproque

III) Propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles

- Tout extremum local en un point intérieur est un point critique
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis (égalité)
- Inégalité des accroissements finis
- Application : suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$
- Théorème de la limite de la dérivée

IV) Propriétés des fonctions dérivables à valeurs complexes

- Caractérisation des fonctions constantes
- Inégalité des accroissements finis

V) Fonctions de classe C^k

- Dérivée k -ème, fonction de classe C^k , de classe C^∞
- Opérations sur les fonctions de classe C^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque

Fonctions convexes

I) Généralités sur les fonctions convexes

- Définition, interprétation géométrique, inégalité de Jensen
- Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes
- Position relative du graphe par rapport à ses sécantes

II) Fonctions convexes dérivables

- Caractérisation de la convexité par la croissance de la dérivée
- Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables par $f'' \geq 0$
- Position relative du graphe d'une fonction convexe et de ses tangentes

Dérivation

- Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1
- Condition nécessaire d'extremum local : point critique
- Théorème de Rolle
- Égalité des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Théorème de la limite de la dérivée

Convexité

- Inégalité de Jensen
- Caractérisation des fonctions convexes dérivables et des fonctions convexes deux fois dérivables

Exercices préparés

Dérivabilité

- Soit f à valeurs réelles, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, vérifiant $f(a) = \lim_{+\infty} f$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$. Montrer que f est de classe C^∞ puis donner une relation entre $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n+1)}$.

Convexité

- Montrer l'inégalité arithmético-géométrique pour des réels strictement positifs :

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$