Semaine 17 du 5 janvier au 9 février 2024

Polynômes

I) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau intègre $\mathbb{K}[X]$
- Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire
- Degré d'une somme, d'un produit
- Composition

II) Divisibilité et division euclidienne

- Diviseurs, multiples
- Division euclidienne

III) Fonctions polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Racine, caractérisation en terme de divisibilité
- Multiplicité d'une racine
- Le nombre de racines est majoré par le degré
- Polynôme scindé, relations coefficients-racines
- Formule d'interpolation de Lagrange et description des polynômes vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

IV) Dérivation

- Dérivée formelle
- Opérations : combinaison linéaire, produit, formule de Leibniz
- Formule de Taylor polynomiale
- Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives

Démonstrations exigibles

Polynômes

- Existence et unicité dans la division euclidienne
- Le nombre α est racine de P ssi P est divisible par $X - \alpha$
- Relations coefficients-racines en degré 2 et 3
- Existence et unicité d'un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
- Formule de Taylor polynomiale
- α est racine de multiplicité m si et seulement si α est racine de $P^{(i)}$ pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$ et n'est pas racine de $P^{(m)}$

Ex. prép.

Polynômes

- Résoudre $(P')^2 = 4P$
- Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$