Semaine 18 du 12 au 16 février 2024

Polynômes

I) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau intègre $\mathbb{K}[X]$
- Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire
- Degré d'une somme, d'un produit
- Composition

II) Divisibilité et division euclidienne

- Diviseurs, multiples
- Division euclidienne

III) Fonctions polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Racine, caractérisation en terme de divisibilité
- Multiplicité d'une racine
- Le nombre de racines est majoré par le degré
- Polynôme scindé, relations coefficients-racines
- Formule d'interpolation de Lagrange et description des polynômes vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

IV) Dérivation

- Dérivée formelle
- Opérations : combinaison linéaire, produit, formule de Leibniz
- Formule de Taylor polynomiale
- Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives

V) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- PGCD, algorithme d'Euclide, relation de Bézout, PPCM
- Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, deux à deux
- Théorème de Bézout, lemme de Gauss

VI) Polynômes irréductibles

- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Décomposition en produit de facteurs irréductibles, dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité
- Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine commune
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$

Fractions rationnelles

I) Généralités sur les fractions rationnelles

- Corps $\mathbb{K}(X)$, forme irréductible
- Degré, partie entière, zéro, pôle, multiplicité

II) Décomposition en éléments simples

- Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$
- Si λ est pôle simple de $\frac{A(X)}{B(X)}$ sous forme irréductible, alors l'élément simple associé à ce pôle est $\frac{A(\lambda)/B'(\lambda)}{X-\lambda}$

Démonstrations exigibles

Polynômes

- Existence et unicité dans la division euclidienne
- Le nombre α est racine de P ssi P est divisible par $X - \alpha$
- Relations coefficients-racines en degré 2 et 3
- Existence et unicité d'un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
- Formule de Taylor polynomiale
- α est racine de multiplicité m si et seulement si α est racine de $P^{(i)}$ pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$ et n'est pas racine de $P^{(m)}$
- Lemme de Gauss
- Si $A \wedge B = 1$, $A|C$ et $B|C$ alors $AB|C$
- Si $A \wedge C = 1$ et $B \wedge C = 1$, alors $(AB) \wedge C = 1$

Fractions rationnelles

- Pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, existence et unicité de (E, G) tel que $F = E + G$ avec E polynôme et G fraction rationnelle de degré $\deg(G) < 0$.
- L'élément simple associé à un pôle simple a pour coefficient $A(\lambda)/B'(\lambda)$

Ex. prép.

Polynômes

- Résoudre $(P')^2 = 4P$
- Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^* \qquad x^n + \frac{1}{x^n} = P_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

et montrer que l'on a : $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$