Semaine 21 du 18 au 22 mars 2024

Séries numériques

I) Convergence et divergence

- Sommes partielles, convergence, somme
- Linéarité de la somme
- Divergence grossière
- Lien suite-série
- Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série géométrique, somme

II) Séries à termes positifs ou nuls

- Convergence ssi la suite des sommes partielles est majorée
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$
- Si $u_n \sim v_n$ avec u_n positives, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
- Si f est décroissante, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$
- Séries de Riemann

III) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

- La convergence absolue entraîne la convergence
- Si $v_n \geqslant 0$, $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente

IV) Théorème des séries alternées

- Théorème spécial, signe et majoration en valeur absolue des restes

V) Formules de Taylor et fonction exponentielle

- Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange
- Convergence de la série exponentielle avec : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Dém. exigibles

Séries numériques

- Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Lien suite-série
- Convergence d'une série à termes positifs si et seulement si ses sommes partielles sont majorées
- Théorème spécial des séries alternées
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange

Exercices préparés

Séries

- À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et de $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
- Étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$