Semaine 22 du 25 au 29 mars 2024

Espaces vectoriels

I) Généralités

- Définition, produit d'espaces vectoriels
- Espaces K^n, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, E^X si E est un espace vectoriel et X un ensemble
- Combinaison linéaire

II) Sous-espaces vectoriels

- Caractérisation
- Intersection de sous-espaces vectoriels
- Sous-espaces $\{0\}$, $\mathbb{K}_n[X]$
- Droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$
- Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $AX = 0$
- Sous-espace vectoriel engendré

III) Familles de vecteurs

- Familles génératrices, libres, bases
- Liberté d'une famille de polynômes de degrés distincts
- Toute famille de polynômes à degrés échelonnés est une base
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$

IV) Somme de deux sous-espaces

- Somme, somme directe
- Caractérisation d'une somme directe par $F \cap G = \{0_E\}$.
- Sous-espaces supplémentaires

Dém. exigibles

Espaces vectoriels

- L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs d'une partie A est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit contenant A.
- Toute famille de polynômes de degrés distincts est libre.
- La somme $F + G$ est directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Exercices préparés

Séries

- Justifier la convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ si $\alpha > 1$ et la divergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ si $\alpha < 1$.
- Justifier la divergence de $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ et la convergence de $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Espaces vectoriels

- L'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.