

Espaces vectoriels

I) Généralités

II) Sous-espaces vectoriels

III) Familles de vecteurs

IV) Somme de deux sous-espaces

V) Espaces vectoriels de dimension finie

VI) Dimension d'un sous-espace

Applications linéaires

I) Généralités

- Application linéaire, combinaison linéaire, composition
- Isomorphisme et linéarité de la réciproque
- Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire
- Image, noyau
- L'image est engendrée par l'image d'une famille génératrice
- Caractérisation de l'injectivité par le noyau
- Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.

II) Endomorphismes

- Anneau $\mathcal{L}(E)$
- Homothétie
- Si $E = F \oplus G$, projection sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G
- Caractérisation des projections par $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$, des symétries par $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{id}$

III) Détermination d'une application linéaire

- Détermination par image d'une base
- Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, détermination de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ à partir de $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$

IV) Applications linéaires en dimension finie

- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$
- Deux e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension
- Théorème du rang

V) Formes linéaires et hyperplans

- Forme linéaire
- Hyperplan : noyau d'une forme linéaire non nulle
- H est un hyperplan ssi il admet une droite vectorielle comme supplémentaire
- Deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi elles sont colinéaires
- Si E est de dimension finie n , une intersection de m hyperplan est de dimension au moins $n - m$
- Réciproquement tout sous-espace de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans

Matrice d'une application linéaire

I) Matrice d'une application linéaire dans des bases

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs
- Matrice d'une application linéaire
- Isomorphisme d'e.v. de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}$
- Isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur \mathcal{M}_n
- Coordonnées de l'image d'un vecteur
- Lien entre matrices inversibles et isomorphismes

II) Application canoniquement associée à une matrice

- Noyau, image, rang d'une matrice
- Les colonnes engendrent l'image
- Une matrice carrée est inversible ssi son noyau est réduit à $\{0\}$ ssi ses colonnes engendrent \mathbb{K}^n ssi elle est de rang n

III) Changement de base

- Matrice de passage d'une base à une autre
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage
- Changement de base et coordonnées d'un vecteur
- Changement de base et matrice d'une application

Applications linéaires

- Si u est un isomorphisme, u^{-1} est linéaire
- L'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel sont des espaces vectoriels
- Forme géométrique du théorème du rang
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p^2 = p$, alors $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ est p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s^2 = \text{id}_E$, alors $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ est s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$
- Deux espaces de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension
- Théorème du rang
- Un s.e.v. est un hyperplan ssi il admet un supplémentaire de dimension 1
- Deux formes linéaires non nulles φ et ψ ont même noyau ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$
- Un intersection de m hyperplans est de dimension au plus $n - m$

Matrice d'une application linéaire

- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$. Si $x \in E$, $X = \text{Mat}_e(x)$ et $Y = \text{Mat}_f(u(x))$, alors $Y = AX$

Démonstrations exigibles

Applications linéaires

- Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $u : M \mapsto AM$. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par u . En déduire que u induit un isomorphisme de $\mathbb{K}[A]$ et conclure que A^{-1} est un polynôme en A .
- Soient $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs de même noyau si et seulement si $p = pq$ et $q = qp$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie. On pourra éventuellement supposer E de dimension finie.

Exercices préparés