Semaine 26 du 13 au 17 mai 2024

Matrice d'une application linéaire

I) Matrice d'une application linéaire dans des bases

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs
- Matrice d'une application linéaire
- Isomorphisme d'e.v. de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}$
- Isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n$
- Coordonnées de l'image d'un vecteur
- Lien entre matrices inversibles et isomorphismes

II) Application canoniquement associée à une matrice

- Noyau, image, rang d'une matrice
- Les colonnes engendrent l'image
- Une matrice carrée est inversible ssi son noyau est réduit à $\{0\}$ ssi ses colonnes engendrent $\mathbb{K}^n$ ssi elle est de rang n

III) Changement de base

- Matrice de passage d'une base à une autre
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage
- Changement de base et coordonnées d'un vecteur
- Changement de base et matrice d'une application

IV) Matrices équivalentes et rang

- Matrices équivalentes
- Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r, il est représenté par J_r dans un couple de bases
- Une matrice est de rang r ssi est équivalente à J_r
- Invariance du rang par transposition
- Rang d'une matrice extraite
- Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites

V) Matrices semblables et trace

- Matrices semblables
- Exemples de recherche de matrice semblable
- Trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude
- Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$
- La trace d'un projecteur est égale à son rang

VI) Opérations élémentaires et systèmes linéaires

- Invariance de l'image (resp. du noyau) par opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes)
- Invariance du rang par opérations élémentaires
- Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice
- Rang de ce système
- $AX = B$ est compatible ssi $B \in \mathrm{Im}(A)$
- Système de Cramer

Dénombrement

I) Cardinal d'un ensemble fini

- Cardinal d'une partie, cas d'égalité
- Si $f : E \to F$ est injective, $|E| \leqslant |F|$
- Si $f : E \to F$ est surjective, $|E| \geqslant |F|$
- Si $|E| = |F|$, f injective ssi f surjective
- Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, différence, produit cartésien

II) Dénombrement

- Cardinal de $\mathcal{P}(E)$, de F^E
- Nombre de p-listes, d'arrangements
- Nombre de permutations
- Nombre d'applications injectives
- Nombre de combinaisons

Démonstrations exigibles

Matrice d'une application linéaire

- Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. Si $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_f(u(x))$, alors $Y = AX$
- L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence
- Une application linéaire de rang r est représentée par $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- tr est une forme linéaire non nulle, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$
- La trace d'un projecteur est son rang

Dénombrement

- Nombre d'arrangements
- Démonstration combinatoire de la formule de Pascal

Exercices préparés

Matrices

- Soit E de dimension finie. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1 et de trace 1, alors f est un projecteur.
- Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = O_n$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $2p \leqslant n$ et $M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.