

Espaces probabilisés et variables aléatoires

I) Univers, évènements, variables aléatoires

- Univers, évènements élémentaires, incompatibles
- Système complet d'évènements
- Variable aléatoire

II) Espaces probabilisés

- Probabilité, distribution de probabilités
- Probabilité uniforme
- Probabilité de la réunion, la différence, l'évènement contraire
- Croissance, sous-additivité

III) Conditionnement

- Probabilités conditionnelles
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes

IV) Évènements indépendants

- Indépendance de deux évènements
- Familles finies d'évènements indépendants
- Indépendance des évènements complémentaires

V) Loi d'une variable aléatoire

- Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$
- Lois usuelles : uniforme, de Bernoulli, binomiale
- Loi conditionnelle
- Couples et n -uplets : loi conjointe et lois marginales

VI) Variables aléatoires indépendantes

- Indépendance de 2 ou n variables aléatoires
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$
- Lemme des coalitions
- Modélisation de n expériences aléatoires par une suite de v.a. indépendantes
- Interprétation de la loi binomiale comme nombre de succès lors de répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli

Démonstrations exigibles

Espaces probabilisés

- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales et formule de Bayes
- Donner un exemple de 3 évènements non indépendants mais 2 à 2 indépendants
- Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$
- Si n variables X_i indépendantes suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors leur somme suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (2 preuves possibles)

Exercices préparés

Espaces probabilisés

- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés et pour lesquels la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{12}$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
- On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie avec remise. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 , sinon dans l'urne U_2 , et ainsi de suite. On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage. Montrer que l'on a $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.