**Semaine 28 du 27 au 31 mai 2024**

## Espaces probabilisés et variables aléatoires

### I) Univers, évènements, variables aléatoires

- Univers, évènements élémentaires, incompatibles
- Système complet d'évènements
- Variable aléatoire

### II) Espaces probabilisés

- Probabilité, distribution de probabilités
- Probabilité uniforme
- Probabilité de la réunion, la différence, l'évènement contraire
- Croissance, sous-additivité

### III) Conditionnement

- Probabilités conditionnelles
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes

### IV) Évènements indépendants

- Indépendance de deux évènements
- Familles finies d'évènements indépendants
- Indépendance des évènements complémentaires

### V) Loi d'une variable aléatoire

- Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$
- Lois usuelles : uniforme, de Bernoulli, binomiale
- Loi conditionnelle
- Couples et $n$-uplets : loi conjointe et lois marginales

### VI) Variables aléatoires indépendantes

- Indépendance de 2 ou $n$ variables aléatoires
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$
- Lemme des coalitions
- Modélisation de $n$ expériences aléatoires par une suite de v.a. indépendantes
- Interprétation de la loi binomiale comme nombre de succès lors de répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli

## Espérance et variance des variables aléatoires

### I) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

- Espérance, variable aléatoire centrée
- Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire
- Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale
- Formule de transfert
- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

### II) Variance d'une variable aléatoire réelle

- Variance et écart-type, variable aléatoire réduite
- Formule de König-Huygens
- Covariance, variables décorrélées
- Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de v.a. indépendantes
- Variance d'une somme, cas de v.a. décorrélées
- Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale

### III) Inégalités probabilistes

- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi

## Démonstrations exigibles

**Espaces probabilisés**

- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales et formule de Bayes
- Donner un exemple de 3 évènements non indépendants mais 2 à 2 indépendants
- Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$
- Si $n$ variables $X_i$ indépendantes suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors leur somme suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (2 preuves possibles)

**Espérance et variance**

- Espérance et variance des lois usuelles
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Formule de König-Huygens
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres

## Exercices préparés

**Espaces probabilisés**

- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés et pour lesquels la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 12. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé $n$ fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité $p_n$ que ce dé soit pipé ?
- On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$. L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie avec remise. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$, sinon dans l'urne $U_2$, et ainsi de suite. On note $p_n$ la probabilité de tirer une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage. Montrer que l'on a $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.
- Soient $n$ variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Soit $M = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer $P(M \geqslant k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et en déduire la loi de $M$.