Semaine 29 du 3 au 7 juin 2024

Déterminants

I) Groupe symétrique

- Groupe S_n des permutations de $[\![1, n]\!]$
- Cycle, transposition
- Décomposition unique en produit commutatif de cycles à supports disjoints
- Décomposition en produit de transpositions
- Signature d'une permutation

II) Formes n-linéaires alternées

- Antisymétrie, effet d'une permutation
- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$

III) Déterminant d'une famille de vecteurs dans un base

- Existence et unicité du déterminant dans une base
- Expression dans une base en fonction des coordonnées
- Comparaison de $\det_e$ et $\det_{e'}$
- $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base ssi $\det_e(x_1, \ldots, x_n) = 0$

IV) Déterminant d'un endomorphisme

- Déterminant d'une composée
- Caractérisation des automorphismes

V) Déterminant d'une matrice carrée

- Déterminant d'un produit, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Caractérisation des matrices inversibles
- det induit un morphisme de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^*$
- Déterminant d'une transposée
- Effet des opérations élémentaires
- Déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs
- Cofacteur et développement par rapport à une ligne ou une colonne

VI) Applications

- Aire dans $\mathbb{R}^2$ et volume dans $\mathbb{R}^3$
- $A\,\mathrm{Com}(A)^\intercal = \mathrm{Com}(A)^\intercal A = \det(A) I_n$
- Expression de l'inverse d'une matrice inversible
- Déterminant de Vandermonde

Démonstrations exigible

Déterminants

- Signature d'un p-cycle
- $\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ ssi $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base
- Formule de développement selon la colonne j (en admettant la formule du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)
- $A\,\mathrm{Com}(A)^\intercal = \mathrm{Com}(A)^\intercal A = \det(A) I_n$
- Calcul du déterminant de Vandermonde

Exercices préparés

Déterminants

- Combien y a-t-il de permutations de S_5 admettant exactement 2 points fixes ?
- Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$