Semaine 30 du 10 au 14 juin 2024

Espaces préhilbertiens

I) Produit scalaire

- Produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$
- Norme associée, distance
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité
- Identité $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$
- Formule de polarisation associée

II) Orthogonalité

- Orthogonal $X^\perp$ d'une partie
- Famille orthogonale, orthonormée
- Théorème de Pythagore
- Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Existence de bases orthonormées en dimension finie
- Expression des coordonnées et du produit scalaire dans une b.o.n.

III) Projection orthogonale

- Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie
- Projection orthogonale
- Expression du projeté orthogonal dans une b.o.n.
- Distance $d(x, F)$ réalisée en $p_F(x)$
- Cas d'un hyperplan : $d(x, \mathrm{Vect}(u)^\perp)$

Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

- Sous-espace affine, direction, exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- Intersection de sous-espaces affines
- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des solutions de $u(x) = b$ est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}\, u$
- Solutions des équations différentielles, suites arithmético-géométriques
- Distance à un sous-espace affine

Révisions : algèbre linéaire

Espaces vectoriels, matrices, déterminants

Révisions : probabilités

Espaces probabilisés, variables aléatoires, espérance et variance

Démonstrations exigibles

Espaces préhilbertiens

- Montrer que les applications $(X, Y) \mapsto X^\intercal Y$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\intercal B)$ et $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ sont des produits scalaires
- Inégalité de Cauchy-Schwarz sans le cas d'égalité
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité
- Tout s.e.v. de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal
- Expression de $p_F(x)$ dans une base orthonormale
- Si $F \oplus F^\perp = E$, la distance $d(x, F)$ est atteinte en un point unique $p_F(x)$.

Exercices préparés

Déterminants

- Montrer que si une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\det(X + C) = \det(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(C) = 0_n$.

Espaces préhilbertiens

- On considère sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$$

Montrer que φ est un produit scalaire et déterminer

$$\left\{ P \in E \mid P'(1) = 0 \right\}^\perp$$