

Fonctions d'une variable réelle

I) Généralités sur les fonctions

- Ensemble de définition
- Somme, produit, composée
- Parité, imparité, périodicité
- Utilisation pour réduire le domaine d'étude

II) Fonctions à valeurs réelles

- Représentation graphique
- Action sur le graphe de transformations du type $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$
- Interprétation géométrique de la parité et la périodicité
- Monotonie, théorème de la bijection continue monotone (admis)
- Fonctions majorées, minorées, bornées
- f bornée ssi $|f|$ majorée

III) Dérivation

- Définition par taux d'accroissement
- Interprétation géométrique
- Sans démonstration : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une fonction réciproque
- Caractérisation des fonctions constantes et (strictement) (dé)croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle
- Fonctions de classe \mathcal{C}^k (seulement la définition)

IV) Fonctions usuelles

- Fonctions circulaires réciproques Arccos, Arccos, Arctan : dérivée, variations, représentation graphique
- $\text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{Arctan } x + \text{Arctan}(1/x) = \pm \frac{\pi}{2}$.
- Exponentielle (admis : unique solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$) et logarithme népérien (défini comme sa réciproque).
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

- $\exp(x) \leq 1+x$ et $\ln(1+x) \leq x$
- Fonctions puissances, règles de calcul
- Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle
- Fonctions hyperboliques ch, sh (et th)
- Formule $\text{ch}^2(y) - \text{sh}^2(y) = 1$

Nombres complexes

I) Ensemble des nombres complexes

- Partie réelle, imaginaire, opérations
- Plan complexe
- Conjugaison, image dans le plan complexe
- Module, $|z|^2 = z\bar{z}$
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité

II) Nombres complexes de module 1

- Cercle trigonométrique
- Exponentielle d'un nombre imaginaire pur
- Exponentielle d'une somme
- Formules d'Euler et de Moivre
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Fonctions d'une variable réelle

- Dérivées de Arccos, Arcsin et Arctan
- $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \pm \frac{\pi}{2}$
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(x) \leq 1+x$ et $\ln(1+x) \leq x$
- $\text{ch}^2(y) - \text{sh}^2(y) = 1$

Nombres complexes

- $z\bar{z} = |z|^2$
- Inégalité triangulaire (sans le cas d'égalité)
- Formules d'Euler et de Moivre

Fonctions d'une variable réelle.

• Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(2x)}$: montrer que l'on peut se ramener à une étude sur $[0, \frac{\pi}{2}] \cap D_f$, dresser le tableau de variations sur ce domaine et représenter graphiquement la fonction.

• Montrer, pour tout réel x , les égalités $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Nombres complexes

• Si z et z' sont deux nombres complexes, montrer

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

et en donner une interprétation géométrique.

Exercices préparés

Démonstrations exigibles