

## Nombres complexes

## I) Ensemble des nombres complexes

- Partie réelle, imaginaire, opérations
- Plan complexe
- Conjugaison, image dans le plan complexe
- Module,  $|z|^2 = z\bar{z}$
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité

## II) Nombres complexes de module 1

- Cercle trigonométrique
- Exponentielle d'un nombre imaginaire pur
- Formules d'Euler et de Moivre
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe
- Transformation de  $a \cos t + b \sin t$  en  $A \cos(t - \Phi)$

## III) Fonction exponentielle

- Exponentielle d'un nombre complexe
- Exponentielle d'une somme
- $\exp(z) = \exp(z')$  ssi  $z \equiv z' [2i\pi]$
- Résolution de  $\exp(z) = w$

## IV) Équations algébriques

- Factorisation d'une fonction polynomiale par  $z - a$  si  $P(a) = 0$
- Recherche de racines carrées sous forme algébrique
- Équations du second degré
- Somme et produit des racines
- Racines  $n^{\text{ème}}$  de l'unité et d'un nombre complexe non nul

## V) Interprétation géométrique des nombres complexes

- Cercles, médiatrices
- Interprétation du module et de l'argument de  $\frac{c-a}{b-a}$
- Traduction de l'alignement et l'orthogonalité
- Similitudes directes
- Interprétation géométrique de la conjugaison

## Calculs algébriques

## I) Sommes et produits

- Changement d'indice
- Sommes et produits télescopiques
- Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$
- Regroupement de termes (notamment selon la parité de l'indice)

## II) Calculs de sommes

- Expressions de  $\sum_{k=1}^n k$  et  $\sum_{k=1}^n k^2$
- Somme de termes de suites arithmétiques ou géométriques
- Sommes trigonométriques  $\sum_k \cos(k\theta)$ ,  $\sum_k \sin(k\theta)$
- Sommes doubles, produit de sommes finies, sommes triangulaires

## Nombres complexes

- $z\bar{z} = |z|^2$
- Inégalité triangulaire (sans le cas d'égalité)
- Formules d'Euler et de Moivre
- Relations coefficients-racines (en degré 2)
- Détermination des racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité
- Décomposition d'une similitude directe en une translation ou la composée commutative d'une rotation et d'une homothétie de mêmes centres

## Calculs algébriques

- Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$
- Expression de  $\sum_{k=1}^n k^2$
- Expression de  $\sum_{k=m}^n u_k$  pour une suite géométrique  $(u_k)_k$  de raison  $q \neq 1$ .

Démonstrations exigibles

## Nombres complexes

- Si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes, montrer

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

et en donner une interprétation géométrique.

- Représenter l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ .

## Calculs algébriques

- Calculer  $\sum_{k=1}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=1}^n \sin(kx)$

Exercices