

## Calculs algébriques

## I) Sommes et produits

- Changement d'indice
- Sommes et produits télescopiques
- Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$
- Regroupement de termes (notamment selon la parité de l'indice)

## II) Calculs de sommes

- Expressions de  $\sum_{k=1}^n k$  et  $\sum_{k=1}^n k^2$
- Somme de termes de suites arithmétiques ou géométriques
- Sommes trigonométriques  $\sum_k \cos(k\theta)$ ,  $\sum_k \sin(k\theta)$
- Sommes doubles, produit de sommes finies, sommes triangulaires

## III) Formule du binôme

- Factorielle
- Coefficients binomiaux
- Formule du binôme
- Utilisation de la formule de Moivre pour exprimer  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$

## IV) Résolution de systèmes linéaires par pivot de Gauss

- Opérations élémentaires de pivot  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  et  $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- Algorithme du pivot
- Application aux intersections de droites et de plan

## Applications

## I) Application d'un ensemble dans un ensemble

- Application, graphe
- Fonction indicatrice d'une partie
- Restriction et prolongement
- Image directe  $f(A)$ , image réciproque notée provisoirement  $f^{-1}(B)$
- Composition, injection, surjection
- Bijection réciproque, réciproque d'une composée

## Calculs algébriques

- Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$
- Expression de  $\sum_{k=1}^n k^2$
- Expression de  $\sum_{k=m}^n u_k$  pour une suite géométrique  $(u_k)_k$  de raison  $q \neq 1$ .

## Applications

- La composée de deux injections est injective.
- La composée de deux surjections est surjective.

Démonstrations exigibles

## Calculs algébriques

- Calculer  $\sum_{k=1}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=1}^n \sin(kx)$
- Calculer  $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$  et  $\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$
- Si  $0 \leq k < n$ , montrer l'égalité

$$\sum_{p=k}^n (-1)^p \binom{n}{p} \binom{p}{k} = 0$$

Exercices