

## Applications et fonctions de variable réelle

## I) Application d'un ensemble dans un ensemble

- Application, graphe
- Fonction indicatrice d'une partie
- Restriction et prolongement
- Image directe  $f(A)$ , image réciproque notée provisoirement  $^{-1}f(B)$
- Composition, injection, surjection
- Bijection réciproque, réciproque d'une composée

## II) Fonctions d'une variable réelle

- Ensemble de définition
- Somme, produit, composée
- Représentation graphique dans le cas d'une fonction à valeurs réelles
- Action sur le graphe de transformations du type  $x \mapsto f(x+a)$  ou  $x \mapsto f(ax)$
- Parité, imparité, périodicité
- Monotonie, théorème de la bijection continue monotone (admis)
- Fonctions majorées, minorées, bornées
- $f$  bornée ssi  $|f|$  majorée

## III) Dérivation

- Définition par taux d'accroissement
- Interprétation géométrique
- Dérivée d'une fonction à valeurs complexes (par parties réelle et imaginaire)
- Sans démonstration : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une fonction réciproque
- Dérivée de  $\exp \circ \Phi$  si  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}$
- Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  (seulement la définition)

## IV) Études de fonctions

- Caractérisation des fonctions constantes et (strictement) (dé)croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle
- Recherche d'extremum ou preuve d'inégalités par étude d'une fonction auxiliaire
- Branches infinies (asymptotes ou branches paraboliques, y compris obliques)

## V) Fonctions exponentielle et logarithme

- Exponentielle (admis : unique solution de  $y' = y$  et  $y(0) = 1$ ) et logarithme népérien (défini comme sa réciproque).
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$  et  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .
- $\exp(x) \leq 1+x$  et  $\ln(1+x) \leq x$

Démonstrations exigibles

## Applications et fonctions de variable réelle

- La composée de deux injections est injective.
- La composée de deux surjections est surjective.
- $f$  est bornée ssi  $|f|$  est majorée
- Dérivabilité et dérivée de  $\exp \circ \Phi$  avec  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\exp(x) \leq 1+x$  et  $\ln(1+x) \leq x$   
 $\exp(x) \geq \frac{x^2}{2}$  si  $x \geq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$   
 courbes représentatives de  $\exp$  et  $\ln$

Exercices

## Applications et fonctions de variable réelle

- Déterminer l'image directe de  $\mathbb{R}^+$  et l'image réciproque de  $[-2,4]$  par  $f : x \mapsto x^2 - 2x$ .
- Les applications  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  sont-elles injectives? Sont-elles surjectives?  
 $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$  et  $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$
- La fonction  $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .