Semaine 6 du 4 au 8 novembre 2024

Applications et fonctions de variable réelle

I)

II) Fonctions d'une variable réelle

- Ensemble de définition ; somme, produit, composée
- Représentation graphique dans le cas d'une fonction à valeurs réelles
- Action sur le graphe de transformations du type $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$
- Parité, imparité, périodicité
- Monotonie, théorème de la bijection continue monotone (admis)
- Fonctions majorées, minorées, bornées
- f bornée ssi $|f|$ majorée

III) Dérivation

- Définition par taux d'accroissement
- Interprétation géométrique
- Dérivée d'une fonction à valeurs complexes (par parties réelle et imaginaire)
- Sans démonstration : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une fonction réciproque
- Dérivée de $\exp \circ \Phi$ si $\Phi : I \to \mathbb{C}$
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (seulement la définition)

IV) Études de fonctions

- Caractérisation des fonctions constantes et (strictement) (dé)croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle
- Recherche d'extremum ou preuve d'inégalités par étude d'une fonction auxiliaire
- Branches infinies (asymptotes ou branches paraboliques, y compris obliques)

V) Fonctions exponentielle, logarithme et puissance

- Exponentielle (admis : unique solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$) et logarithme népérien (défini comme sa réciproque).
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- $\exp(x) \leqslant 1 + x$ et $\ln(1+x) \leqslant x$
- Fonctions puissances, règles de calcul
- Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle

VI) Fonctions trigonométriques

- Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan : dérivée, variations, représentation graphique
- $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x) = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Fonctions hyperboliques ch, sh et th
- Formule $\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y) = 1$

Calcul intégral

I) Propriétés de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs réelles (admis)
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes : $\int_a^b f \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \operatorname{Re}(f) + \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im}(f)$
- Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire (résultats admis)
- Pour f à valeurs réelles : positivité, croissance (résultats admis)

II) Primitives

- Primitive d'une fonction à valeurs complexes
- Sur un intervalle les primitives diffèrent d'une constante additive
- Théorème fondamental (admis) : si f est continue, alors $x \mapsto \int_a^x f$ est la primitive de f s'annulant en a ; elle est de classe $\mathcal{C}^1$
- Si F est une primitive de f on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

III) Intégration par parties et changement de variable

- Intégration par parties
- Changement de variable

Démonstrations exigibles

Applications et fonctions de variable réelle

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\exp(x) \leqslant 1 + x$ et $\ln(1+x) \leqslant x$

  $\exp(x) \geqslant \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

  courbes représentatives de exp et ln
- Dérivées de Arccos, Arcsin, Arctan, ch, sh
- $\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y) = 1$

Dérivation, intégrales et primitives

- Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante additive
- Formule d'intégration par parties
- Formule de changement de variable

Exercices

Applications et fonctions de variable réelle

- La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
- Soit $f(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(2x)}$. Déterminer le domaine de définition D_f. Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cap D_f$. Tracer la courbe représentative de f.
- $\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \pm\frac{\pi}{2}$