Semaine 7 du 12 au 15 novembre 2024

Calcul intégral

I) *Propriétés de l'intégrale*

- Intégrale d'une fonction à valeurs réelles (admis)
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes : $\int_a^b f \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f)$
- Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire (résultats admis)
- Pour f à valeurs réelles : positivité, croissance (résultats admis)

II) *Primitives*

- Primitive d'une fonction à valeurs complexes
- Sur un intervalle les primitives diffèrent d'une constante additive
- Théorème fondamental (admis) : si f est continue, alors $x \mapsto \int_a^x f$ est la primitive de f s'annulant en a ; elle est de classe $\mathcal{C}^1$
- Si F est une primitive de f on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

III) *Intégration par parties et changement de variable*

- Intégration par parties
- Changement de variable
- Application au calcul de primitives

IV) *Recherche de primitives*

- Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$; application aux fonctions $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $t \mapsto e^{ax}\sin(bx)$
- Primitives des fonctions logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques
- Primitives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Équations différentielles linéaires

I) *Équations différentielles du premier ordre*

- Solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$
- Principe de superposition
- Forme des solutions de l'équation complète
- Méthode de variation de la constante

Démonstrations exigibles

Dérivation, intégrales et primitives

- Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante additive
- Formule d'intégration par parties
- Formule de changement de variable

Équations différentielles linéaire

- Solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$
- Principe de superposition
- Si y_p est une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$, l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y_p + y_h$ avec y_h solution de l'équation homogène.

Exercices

Intégrales et primitives

- Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire une expression de I_{2p} pour tout p dans $\mathbb{N}$.
- Calculer $\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \sin\theta$.
- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

Équations différentielles

- Résoudre $(x\ln x)y'(x) - y(x) = 2x^2(\ln x)^2$ sur $]0,1[$.