Semaine 9 du 25 au 29 novembre 2024

Relations sur un ensemble et ensemble des nombres réels

I) Relation binaire sur un ensemble

- Relation d'équivalence, classes d'équivalence
- Les classes d'équivalence forment une partition
- La relation de congruence modulo a est une relation d'équivalence
- Relation d'ordre, ordre total, ordre partiel

II) Relation d'ordre sur l'ensemble des nombres réels

- Approximations décimales d'un réel
- Borne supérieure, borne inférieure
- Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (admis)
- Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- X est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi $\forall\ (a,b) \in X^2\ [a,b] \subset X$

Suites numériques

I) Généralités

- Modes de définition : explicite, implicite, par récurrence
- Suites réelles majorées, minorées, bornées, monotones, stationnaires
- Suites complexes bornées, stationnaires

II) Limite d'une suite

- Limite d'une suite, unicité
- Toute suite convergente est bornée
- Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient
- Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle
- Passage à la limite d'une inégalité large
- Si u_n tend vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
- Caractérisation de la limite d'une suite complexe par les parties réelle et imaginaire

III) Théorèmes d'existence de limites

- Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$)
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes

IV) Suites extraites

- Toute suite extraite d'une suite de limite ℓ a pour limite ℓ
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite, alors (u_n) a la même limite
- Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par dichotomie

Démonstrations exigibles

Relations sur un ensemble

- Les classes d'équivalence pour une relation d'équivalence sur un ensemble E forment une partition de E.
- La congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$
- Si M est la borne supérieure d'une partie non vide majorée X de $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $M - \varepsilon < x \leqslant M$

Suites numériques

- Unicité de la limite
- Toute suite convergente est bornée
- Si les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ sont finies, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- Théorème de la limite par encadrement
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ

Exercices préparés

Relations sur un ensemble

- Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
- Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions majorées. Comparer $\sup(f+g)$ et $\sup f + \sup g$.

Suites numériques

- Montrer que toute suite convergente d'entiers est stationnaire.