Semaine 13 du 6 au 10 janvier 2025

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

I) Divisibilité

- Diviseurs, multiples
- Congruences : somme et produit
- Division euclidienne

II) PGCD et PPCM

- PGCD d'un nombre fini d'entiers
- Algorithme d'Euclide
- Relation de Bézout
- Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$
- $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$ si $k \in \mathbb{N}^*$
- PPCM d'un nombre fini d'entiers

III) Entiers premiers entre eux

- Couple d'entiers premiers entre eux
- Théorème de Bézout
- Lemme de Gauss
- Si a et b premiers entre eux divisent n, alors ab divise n
- Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n
- Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux

IV) Nombres premiers

- Crible d'Eratosthène
- L'ensemble des nombres premiers est infini
- Existence et unicité de la décomposition d'un nombre entier non nul en produit de nombres premiers
- Valuation p-adique : caractérisation de la divisibilité, expressions du PGCD et du PPCM

V) Utilisation des congruences et applications

- Petit théorème de Fermat
- Utilisation d'un inverse modulo n

Limites

I) Limite finie en un point

- Limite finie ou infinie en a d'une fonction à valeurs réelles ou complexes
- Unicité de la limite
- Si f définie en a admet une limite en a, cette limite est $f(a)$
- Si f possède une limite finie en a elle est bornée au voisinage de a
- Limite à gauche et à droite
- Caractérisation séquentielle

II) Opérations sur les limites

- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition
- Passage à la limite d'une inégalité large

III) Théorèmes d'existence de limites

- Existence d'une limite par encadrement, minoration, majoration
- Théorème de la limite monotone

Démonstrations exigibles

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Compatibilité de la congruence avec la somme et le produit
- Division euclidienne : existence et unicité du quotient et du reste
- Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$
- Lemme de Gauss
- Si $a \wedge b = 1$, $a|n$ et $b|n$ alors $ab|n$
- Si $a \wedge n = 1$ et $b \wedge n = 1$, alors $(ab) \wedge n = 1$
- Petit théorème de Fermat

Limites

- Unicité de la limite (dans le cas de deux limites finies)
- Si f possède une limite finie en a, elle est bornée au voisinage de a
- Caractérisation séquentielle de la limite
- Théorème de la limite encadrée
- Théorème de la limite monotone en a

ercices prépar

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premier entre eux. En déduire que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.
- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, montrer $a^{13} \equiv a[2730]$.